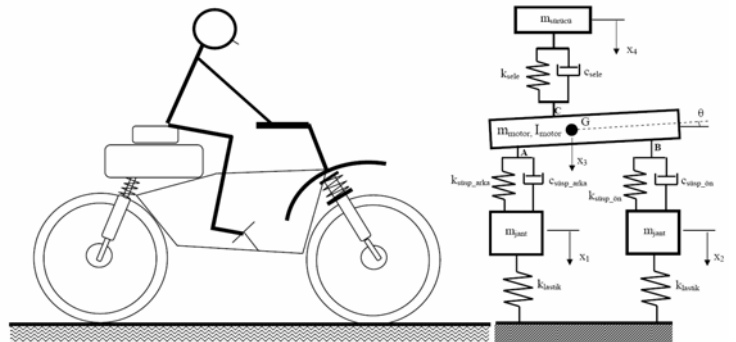
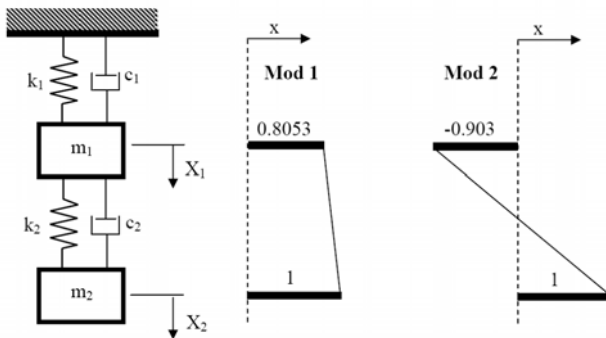
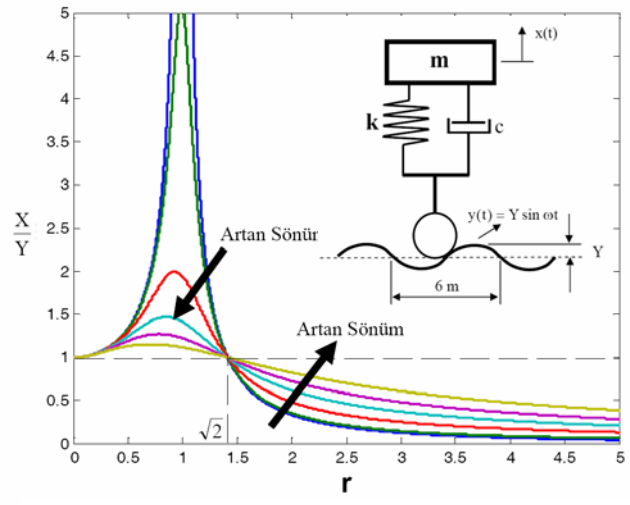
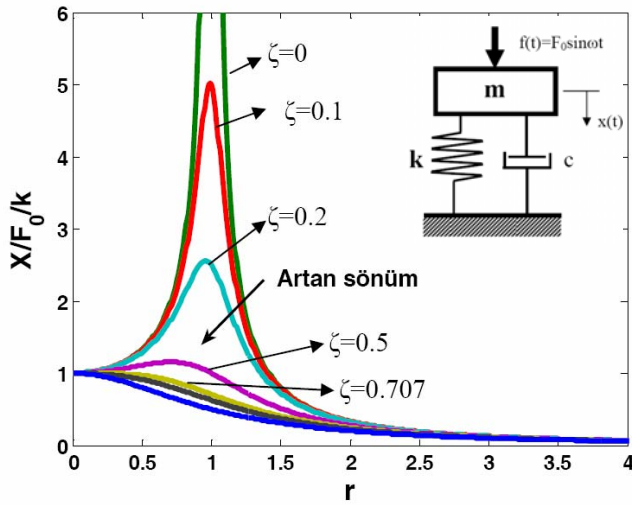


MAK 4041 MEKANİK TİTREŞİMLER DERS NOTLARI

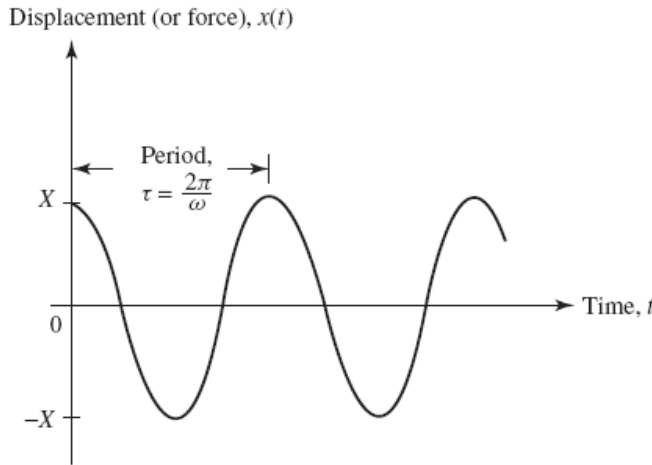


MAK 4041 MEKANİK TİTREŞİMLER

Titreşim dinamiğin bir alt kolu olup tekrarlanan hareketler ile ilgilenir. Bu ders içeriğinde mekanik yapılar ile ilgili titreşim problemleri ele alınmakla birlikte titreşim iletişimin temelinde bulunmaktadır. (Kulak zarı ve ilişkili mekanizma işitme işlemini gerçekleştirmek amacı ile titreşir, dil ve ses telleri konuşmak için titreşir). Müzikal enstrümanların birçoğunda, özellikle telli enstrümanlarda, titreşim istenilen bir olaydır. Diğer taraftan titreşim birçok mekanik sistem için istenmeyen, bazı durumlarda da yıkıcı bir durumdur. Örneğin uçak gövdesindeki titreşimler yorulmaya neden olur ve sonuç olarak hasara yol açar. Deprem kaynaklı titreşimler binalarda çatlaklara ve hasarlara sebep olabilir. Günlük hayatta titreşim sıkça karşılaşılan bir etkidir ve genellikle titreşim seviyelerinin azaltılması temel ilgi alanıdır.

Titreşim, cisimlerin sabit bir referans eksene veya nominal bir pozisyona (denge konumu) göre tekrarlanan hareketi olarak ifade edilir. Titreşim her yerde mevcut olan ve mühendislik tasarımlarının yapısını etkileyen bir olgudur. Titreşim karakteristikleri mühendislik tasarımları için belirleyici faktör olabilir. Titreşim bazen zararlı olabilir ve kaçınılmalıdır, bazen de oldukça yararlıdır ve istenilir. Her iki durumda da titreşimin nasıl analiz edileceği, ölçüleceği ve kontrol edileceği mühendislik için önemli bir bilgidir.

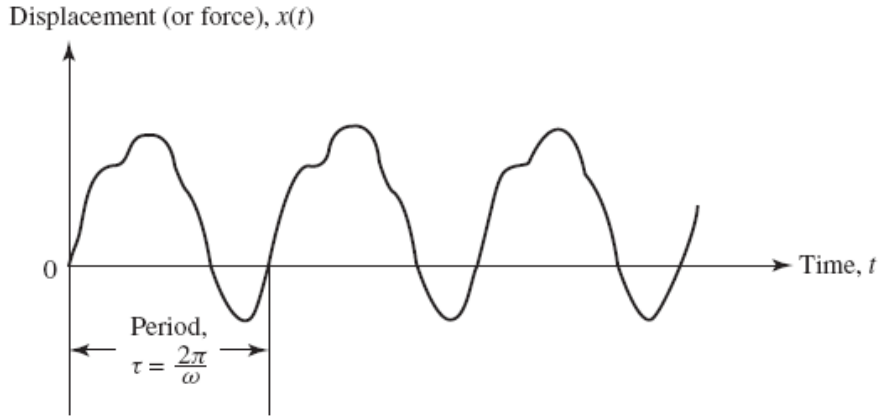
Titreşim teorisi cisimlerin ve ilgili kuvvetlerin salınımlı (oscillatory) hareketleri ile ilgilenir. Şekil 1'de görülen salınımlı hareket Harmonik Hareket olarak adlandırılır ve aşağıdaki formül ile ifade edilir.



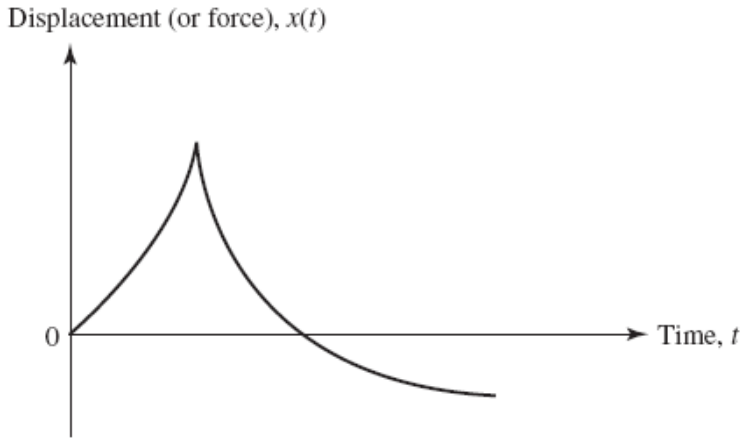
Şekil 1. Basit harmonik hareket.

$$x(t) = X \cos \omega t$$

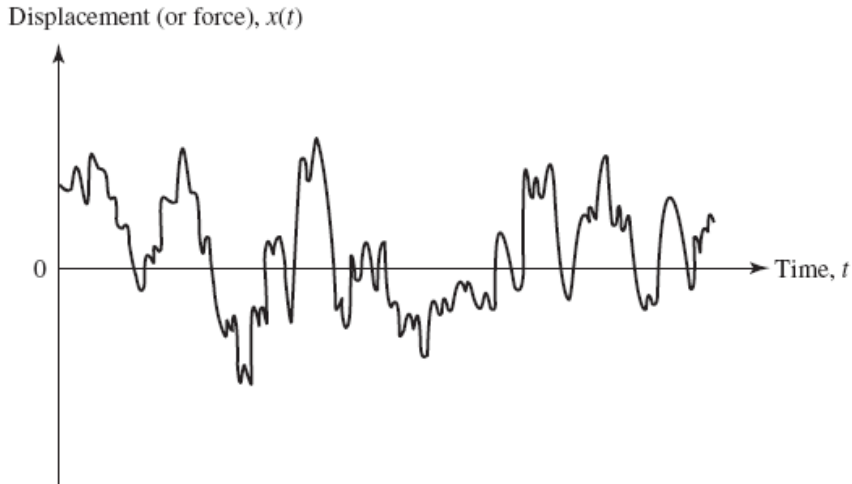
Burada X hareketin genliği, ω hareketin frekansı ve t zamandır. Şekil 2'de periyodik (periodic) hareket, Şekil 3'de periyodik olmayan (nonperiodic) veya geçici (transient) hareket, Şekil 4'de ise gelişigüzel veya uzun zamanlı periyodik olmayan hareket eğrileri görülmektedir.



Şekil 2. Periyodik hareket.



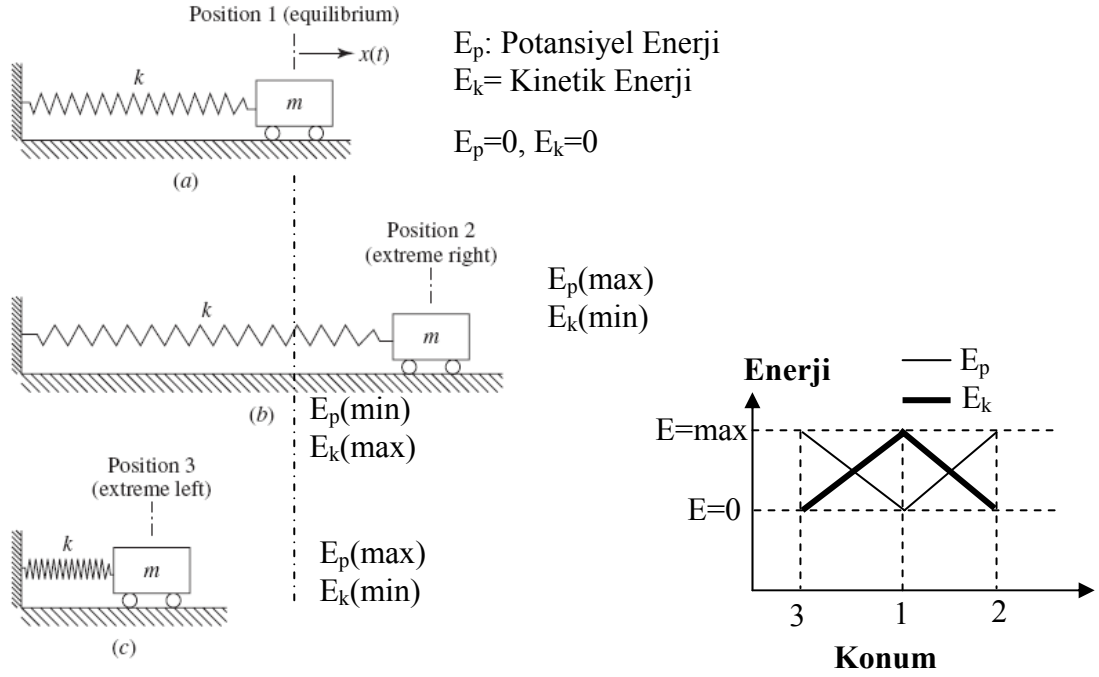
Şekil 3. Geçici (transient) hareket.



Şekil 4. Gelişigüzel (random) veya uzun zamanlı periyodik hareket.

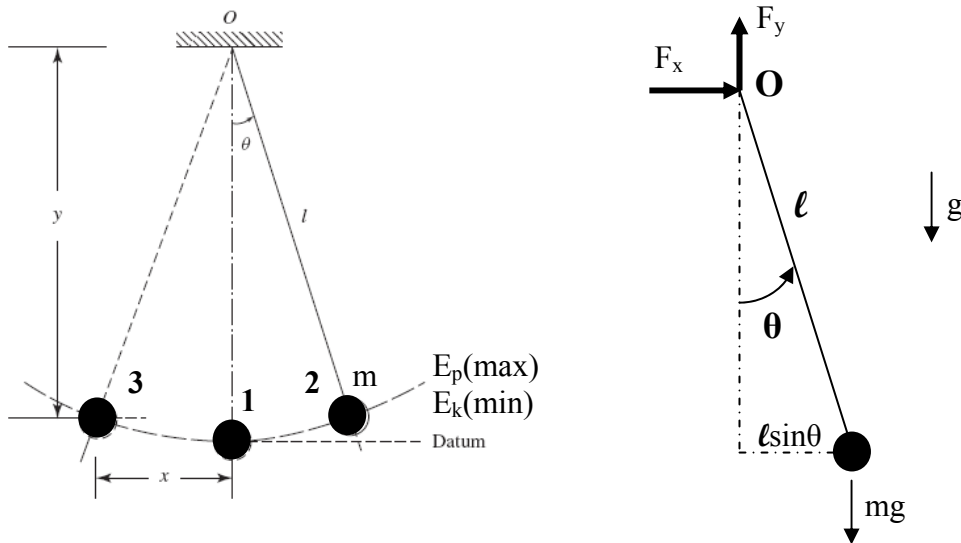
Titreşim olayı potansiyel enerjinin kinetik enerjiye, kinetik enerjinin ise potansiyel enerjiye dönüşümünü içermektedir. Bu nedenle titreşim yapan sistemler potansiyel enerji ve kinetik enerji depolayan elemanlara sahip olmalıdır. Potansiyel enerji depolayan elemanlar yay veya elastik elemanlar, kinetik enerji depolayan elemanlar ise kütle veya atalet elemanlarıdır. Elastik elemanlar potansiyel enerji depolar ve bu enerjiyi atalet elemanına

kinetik enerji olarak geri verir. Şekil 5’de bir kütle yay sisteminin denge konumu etrafındaki hareketi görülmektedir. Şekil 5a’da yay ile zemine bağlanmış kütle denge konumunda görülmektedir. Kütle verilen ilk yer değiştirme ile 2 konumuna getirilmiştir. 2 konumunda yayın en uzamış halde olduğu ve dolayısı ile yayda depolanan potansiyel enerjinin en yüksek düzeyde olduğu, bu konumda kütle sıfır hıza sahip olduğu için ise kinetik enerjinin sıfır olduğu bilinmektedir. Kütle 2 konumundan serbest bırakıldığında m kütlesi 1 konumuna doğru artan bir hızla hareket eder. Kütle 1 konumuna geldiğinde yay uzamamış boyuna ulaşır ve depoladığı potansiyel enerjiyi tamamen m kütesine aktarmıştır. Bu konumda enerjinin korunumu prensibine göre kütle kinetik enerjisi dolayısı ile hızı en büyük değerine ulaşır.



Şekil 5. Yay-kütle sisteminin hareketi.

Yukarıda verilen yay-kütle sistemindeki enerji değişimi Şekil 6’da gösterilen basit sarkaç ile benzerdir.



Şekil 6. Basit sarkaç.

Titreşim yapan sistemlere uygulanan başlangıç zorlaması kütleye uygulanan başlangıç deplasmanı ve/veya hızı şeklinde olabilir. Bu başlangıç girdisi sisteme potansiyel ve/veya kinetik enerji kazandırılmasına neden olur. Bu başlangıç girdisi sistemi serbest titreşim olarak adlandırılan salınımlı bir harekete sürükler. Serbest titreşim anında potansiyel ve kinetik enerji arasında bir değişim söz konusudur. Eğer sistem konservatif/korunumlu (conservative) ise sistemin potansiyel ve kinetik enerjisinin toplamı sabittir ve zamana göre değişimi sıfırdır. Bu durumda sistem teorik olarak sonsuza dek titreşir. Pratikte ise titreşim yapan sistemlerde sönüm veya sistemi çevreleyen ortamdan kaynaklanan sürtünme (örneğin hava direnci) mevcuttur ve bu etkiler hareket sırasında sistemin enerjisini kaybetmesine sebep olur. Sönüm etkisi sistemin toplam enerjisinin sürekli olarak azalmasına ve sıfırlanmasına (hareketin sonlandığı nokta) sebep olur. Eğer sisteme sadece ilk hareket şartları ile (yer değiştirme/hız) girdi sağlanmış ise ortaya çıkan salınımlı hareket sonunda sonlanacaktır. Bu şekildeki başlangıç girdilerine geçici zorlama (transient excitation) ve sonuç olarak ortaya çıkan harekete ise geçici hareket (transient motion) adı verilir. Eğer sistem belirli bir genlikteki cevapta tutulmak isteniyor ise sürekli bir dış kaynak ile uyarılmalıdır.

Dinamik ve alt alanı olan titreşim konusunda çalışan ve bu alana önemli katkılar sağlayan bilim insanları Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Sürekli sistemlerin titreşimi konusuna katkı yapan başlıca bilim insanları.

Period	Scientist	Contribution
582–507 B.C.	Pythagoras	Established the first school of higher education and scientific research. Conducted experiments on vibrating strings. Invented the monochord.
384–322 B.C.	Aristotle	Wrote a book on acoustics. Studied laws of motion (similar to those of Newton). Introduced vectorial addition of forces.
Third century B.C.	Alexander of Afrodisias	Kinetic and potential energies. Idea of conservation of energy.
325–265 B.C.	Euclid	Prominent mathematician. Published a treatise called <i>Introduction to Harmonics</i> .
A.D.		
1564–1642	Galileo Galilei	Experiments on pendulum and vibration of strings. Wrote the first treatise on modern dynamics.
1642–1727	Isaac Newton	Laws of motion. Differential calculus. Published the famous <i>Principia Mathematica</i> .
1653–1716	Joseph Sauveur	Introduced the term <i>acoustics</i> . Investigated harmonics in vibration.
1685–1731	Brook Taylor	Theoretical solution of vibrating strings. Taylor’s theorem.
1700–1782	Daniel Bernoulli	Principle of angular momentum. Principle of superposition.

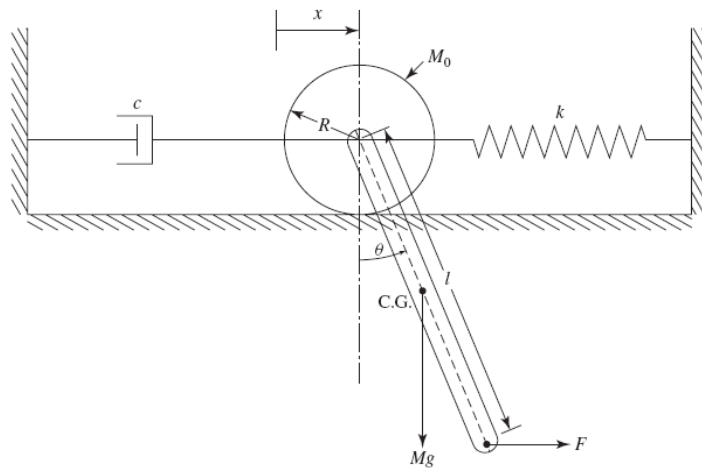
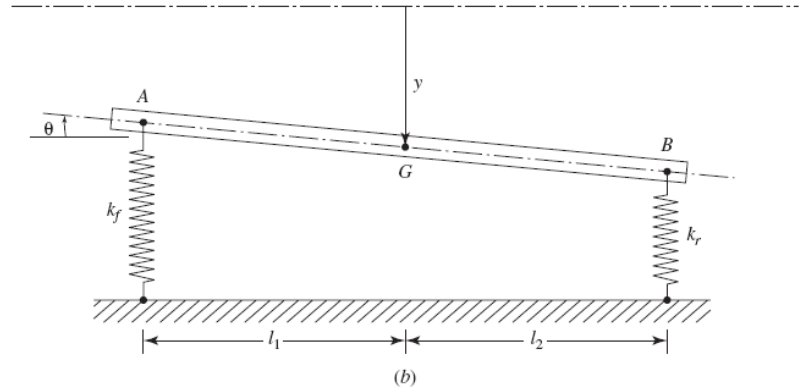
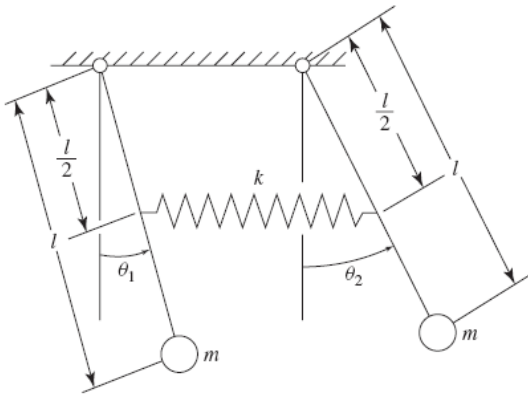
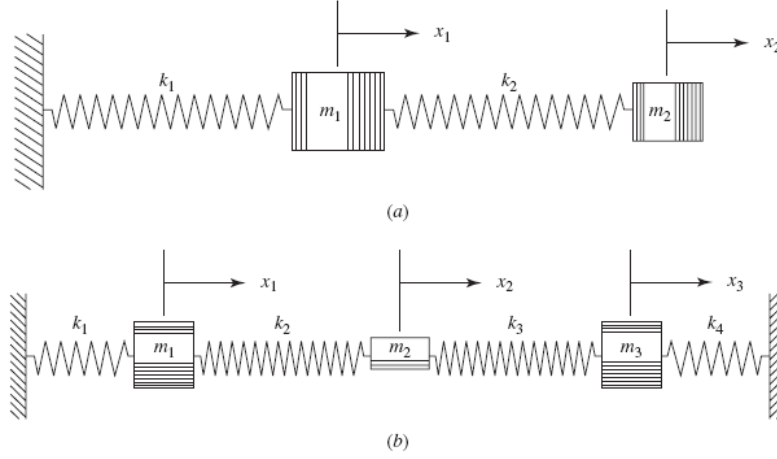
Tablo 1. (Devamı)

1707–1783	Leonhard Euler	Principle of superposition. Beam theory. Vibration of membranes. Introduced several mathematical symbols.
1717–1783	Jean D’Alembert	Dynamic equilibrium of bodies in motion. Inertia force. Wave equation.
1736–1813	Joseph Louis Lagrange	Analytical solution of vibrating strings. Lagrange’s equations. Variational calculus. Introduced the term <i>generalized coordinates</i> .
1736–1806	Charles Coulomb	Torsional vibration studies.
1756–1827	E. F. F. Chladni	Experimental observation of mode shapes of plates.
1776–1831	Sophie Germain	Vibration of plates.
1785–1836	Claude Louis Marie Henri Navier	Bending vibration of plates. Vibration of solids. Originator of modern theory of elasticity.
1797–1872	Jean Marie Duhamel	Studied partial differential equations applied to vibrating strings and vibration of air in pipes. Duhamel’s integral.
1805–1865	William Hamilton	Principle of least action. Hamilton’s principle.
1824–1887	Gustav Robert Kirchhoff	Presented extended theory of plates. Kirchhoff’s laws of electrical circuits.
1842–1919	John William Strutt (Lord Rayleigh)	Energy method. Effect of rotatory inertia. Shell equations.
1874	H. Aron	Shell equations in curvilinear coordinates.
1888	A. E. H. Love	Classical theory of thin shells.
1871–1945	Boris Grigorevich Galerkin	Approximate solution of boundary value problems with application to elasticity and vibration.
1878–1909	Walter Ritz	Extended Rayleigh’s energy method for approximate solution of boundary value problems.
1956	Turner, Clough, Martin, and Topp	Finite element method.

SERBESTLİK DERECEŚİ

Bir sistemin serbestlik derecesi, sisteme ait her parçanın herhangi bir t anındaki konumlarını tanımlayabilmek için gerekli olan minimum bağımsız koordinat sayısıdır. Şekil 5’deki yay kütle sistemindeki kütlelerin konumu sadece x koordinatı ile ifade edilebilir,

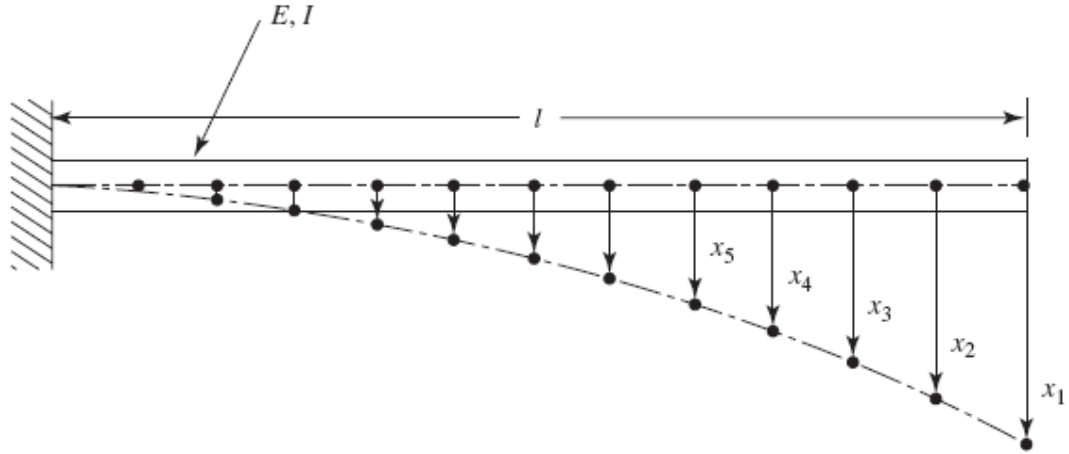
dolayısı ile yay kütle sistemi tek serbestlik derecelidir. Şekil 6'da verilen basit sarkaç hareketi de θ koordinatı ile ifade edilebilir. Bununla birlikte sarkaç hareketi x ve y koordinatları ile de tanımlanabilir. Fakat x ve y koordinatları arasında $x^2+y^2=l^2$ bağıntısı da vardır. Bu denklem bir kısıtlamadır ve x ve y birbirinden bağımsız değildir. Dolayısı ile basit sarkaç sistemi tek serbestlik derecelidir. Şekil 7'de çok serbestlik dereceli sistemlere örnekler verilmiştir.



Şekil 7. Çok serbestlik dereceli sistem örnekleri.

Çok serbestlik dereceli bir sistem yay ve sönümleyiciler ile ayrılmış noktasal kütlelerden oluşan bir sistem olarak düşünülebilir. Bu durumda sistem parametreleri ayrık ve sonlu sayıdadır. Bu tip sistemler topaklanmış parametrelili (lumped-parameter), ayrık (discrete) veya sonlu boyutlu (finite-dimensional) sistemler olarak adlandırılır (Şekil 7).

Diğer taraftan, sürekli sistemlerde kütle, elastiklik (flexibility) ve sönüm sistem üzerine dağılmış durumdadır. Titreşim sırasında sonsuz sayıdaki noktasal kütleler birbirlerine göre farklı hareketler yapabilir. Bu tip sistemlere dağıtılmış (distributed), sürekli (continuous) veya sonsuz boyutlu (infinite-dimensional) sistemler adı verilir. Sürekli sistemler için temel bir örnek Şekil 8’de gösterilen ankastre (cantilever) kiriştir. Kiriş sonsuz sayıda maddesel kütleyle sahiptir ve bunun sonucu olarak kiriş hareketini (çökmesini) ifade edebilmek için sonsuz sayıda koordinata ihtiyaç vardır. Bu sonsuz sayıdaki koordinat kirişin elastik çökme eğrisini oluşturur. Birçok mekanik ve yapısal sistem sürekli esneklik ve kütle dağılımına sahiptir ve sonsuz serbestlik derecesine sahiptir.



Şekil 8. Ankastre kiriş (sürekli sistem).

TİTREŞİMİN SINIFLANDIRILMASI

Titreşim problemleri aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir.

1. Sönümsüz ve sönümlü titreşimler: Eğer sistemde sürtünme veya benzeri dirençler sebebi ile enerji kaybı ve sönümüne sebep olacak bir etki yok ise titreşim problemi sönümsüz (undamped) olarak adlandırılır. Eğer sistemde sönüm mevcut ise sistem sönümlü (damped) olarak adlandırılır. Titreşim problemlerini incelerken sönüm ihmal edilerek çözüm basitleştirilebilir, fakat sönüm etkileri özellikle rezonans durumu için oldukça önemlidir.

2. Serbest ve zorlanmış titreşimler: Eğer sistem ilk şartlar neticesinde titreşiyor ise ($t > 0$ için sisteme etki eden dış zorlama yok) sistem titreşimlerine serbest titreşim adı verilir. Eğer sistem dış zorlama etkisi ile titreşiyor ise oluşan titreşimlere zorlanmış titreşim adı verilir.

3. Lineer ve lineer olmayan (nonlinear) titreşimler: Eğer titreşim yapan sistemin tüm bileşenleri doğrusal (lineer) davranışa sahip ise oluşan titreşimlere lineer titreşim adı verilir. Eğer sistem elemanlarından herhangi biri doğrusal olmayan davranışa sahip ise oluşan titreşimlere lineer olmayan (nonlinear) titreşim adı verilir. Bu tip sistemlerin hareketini ifade eden diferansiyel denklemler lineer olmayan formdadır. Birçok titreşim sistemi, büyük titreşim genlikleri için lineer olmayan davranışa sahiptir.

TİTREŞİM ANALİZİ

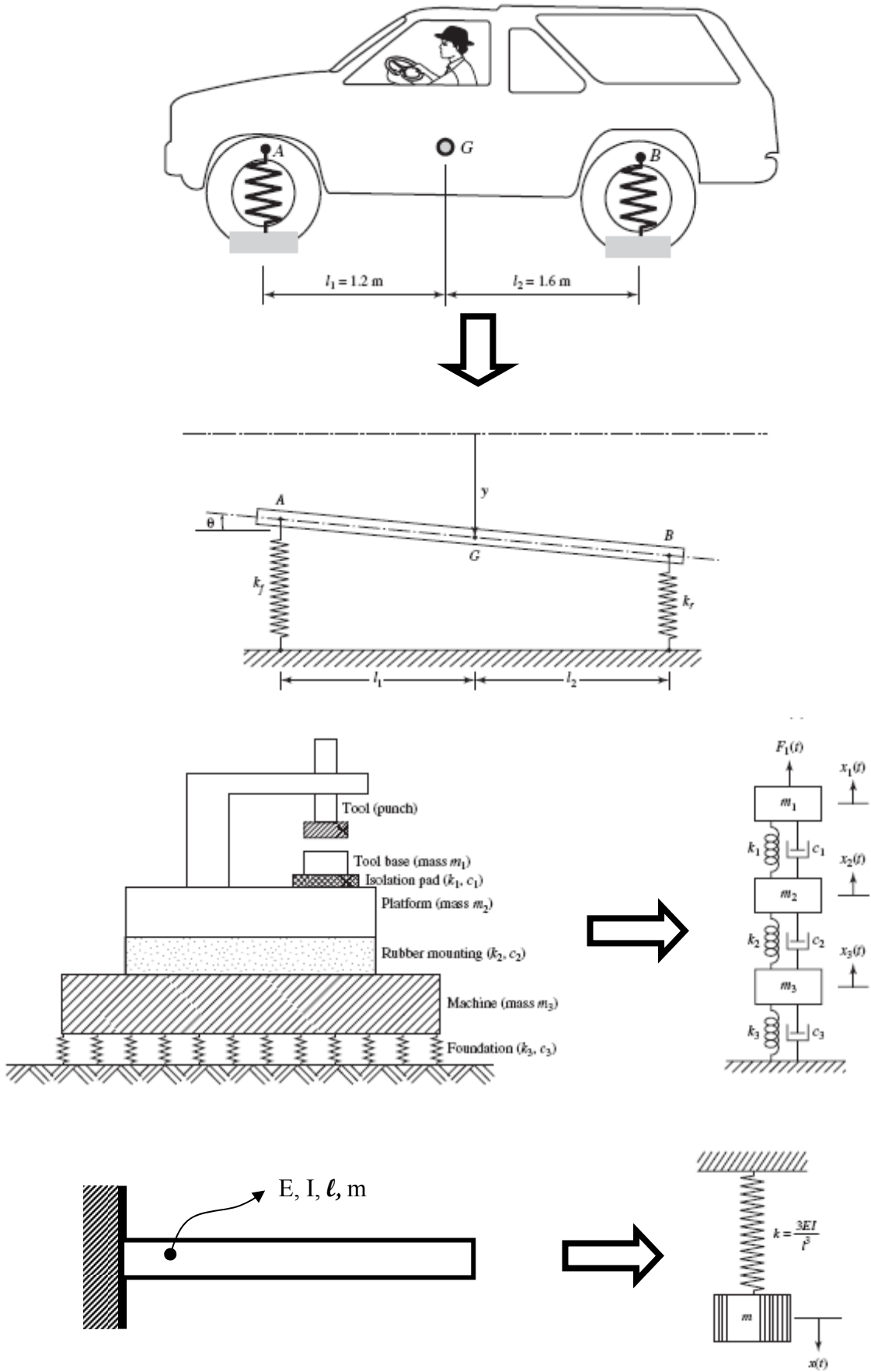
Bir titreşim sistemi cevabı zorlamalara (excitations) ve sistem parametrelerine (kütle, direngenlik ve sönüm) bağlı olan dinamik bir sistemdir. Zorlama ve cevap zamana bağlıdır. Titreşim analizi belirtilen bir dış zorlamaya bağlı olarak sistem cevabının belirlenmesidir. Bu analiz matematik modelleme, hareket denklemlerinin oluşturulması (derivation of the governing equations of motion), hareket denklemlerinin çözümü ve sistem cevabının yorumlanması aşamalarını içerir.

Matematiksel modellemenin amacı hareket denklemlerini oluşturmak amacı ile sisteme ait tüm önemli karakteristik özellikleri sunmaktır. Matematik model, sistem özelliklerine göre lineer veya lineer olmayan biçimde olabilir. Eğer sisteme ait matematik model lineer ise süperpozisyon prensibi uygulanabilir. Lineer sistemlerde $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ şeklindeki bağımsız girdilere verilen cevap sırasıyla $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ ise, $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ şeklindeki bir girdiye karşılık sistem cevabı $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ dir.

Matematik model oluşturulduktan sonra, dinamik prensipleri hareket denklemini oluşturmak amacı ile kullanılır. Bu amaçla, tüm dış zorlamaları, reaksiyon kuvvetlerini ve atalet kuvvetlerini içerecek şekilde kütlelere ait Serbest Cisim Diyagramları oluşturulur. D'Alembert prensibi, Newton'un 2. yasası, Lagrange veya Hamilton prensibi gibi yöntemler hareket denklemlerini oluşturmak amacı ile kullanılır. Sistem cevabını analitik (closed-form) veya nümerik olarak elde etmek amacı ile hareket denklemleri değişik yöntemler kullanılarak çözülür ve sonuç olarak sisteme ait yer değiştirme (displacement), hız (velocity) veya ivme (acceleration) cevapları elde edilir.

MATEMATİK MODEL OLUŞTURMA

Titreşim yapan sistemlerin analizi için ilk olarak sistem yapısını yeterli derecede ifade edecek içerikte bir matematik model oluşturulur. Oluşturulan model sistemin temel titreşim hareketlerini yeterli yaklaşıklıkla ifade edilecek nitelikte basitleştirmeler içerebilir. Matematik model oluşturulur iken titreşim sisteminde bulunan elemanların lineer veya lineer olmayan özellikleri belirtilir. Şekil 9'da bazı sistemleri ve bunlara ait matematik modeller verilmiştir.

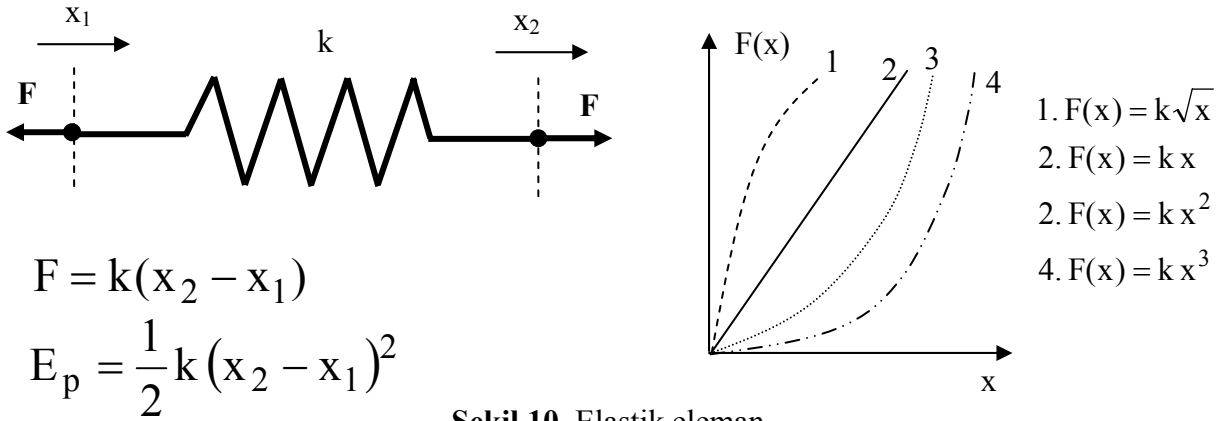


Şekil 9. Bazı sistemler ve ilgili matematik modelleri.

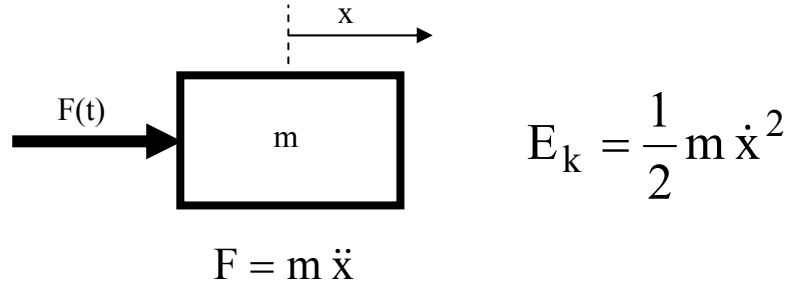
TİTREŞİM SİSTEMLERİNİN TEMEL ELEMANLARI

Titreşim yapan sistemlerde potansiyel ve kinetik enerji depolayan elemanlar ile sönümlü sistemlerde enerji sönümünü sağlayan elemanlar mevcuttur. Bu elemanlara ait denklemler aşağıda verilmiştir.

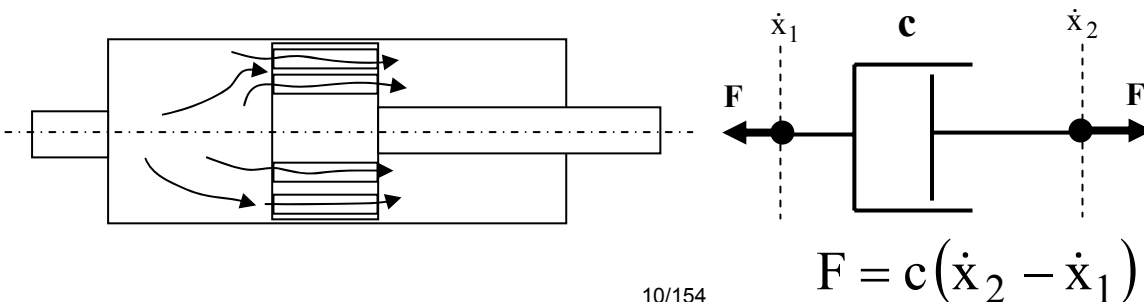
a) Elastik Elemanlar (Yaylar): Yaylar titreşim sistemlerindeki kütleleri birbirine bağlayan ve kütlelerin bağıl hareketlerini sağlayan elemanlardır. Yaylar lineer ve nonlineer karakteristiğe sahip olabilirler. Lineer karakteristiğe sahip yaylar Hooke yasasına uygun davranırlar ve yayda oluşan elastik kuvvet yaydaki şekil değişimi ile orantılıdır. Fakat titreşim genliklerinin yüksek olduğu zaman ve/veya metal olmayan malzemeler kullanıldığında yaylar lineer davranışa sahip olmayabilirler. Şekil 10'da bazı yay karakteristikleri gösterilmiştir.



b) Atalet Elemanları : Atalet elemanları kinetik enerji depolayan elemanlardır. Atalet elemanları öteleme ve dönme hareketlerini ayrı ayrı yapabilecekleri gibi, hem öteleme hem de dönme hareketini birlikte gerçekleştirebilirler. Atalet elemanlarına ait eleman denklemini aşağıda verilmiştir.



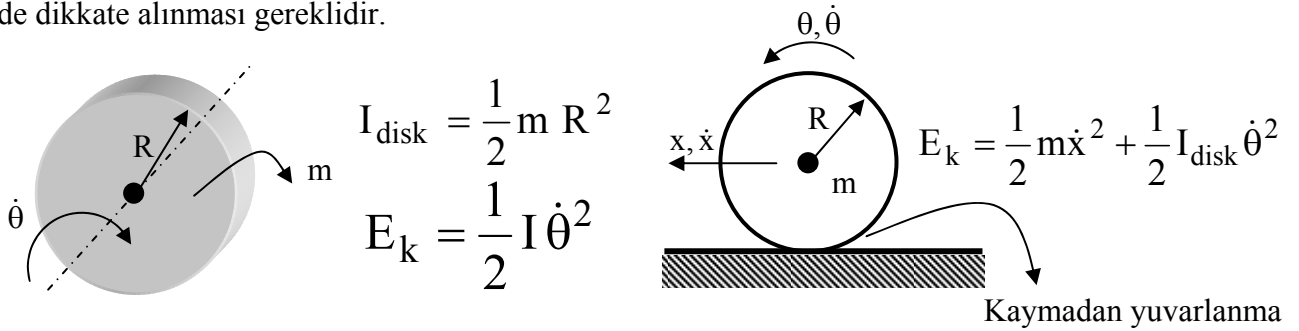
c) Sönüm elemanları : Sönümlü sistemlerde enerji yutumunu sağlayan elemanlardır. Amortisör tipi elemanlar akışkan sürtünmesi ile enerji kaybını sağlarlar ve titreşim genliklerinin eksponansiyel olarak azaltırlar. Sönüm elemanlarında mekanik enerji ısı enerjisine dönüşür. Eleman denklemini aşağıda verilmiştir.



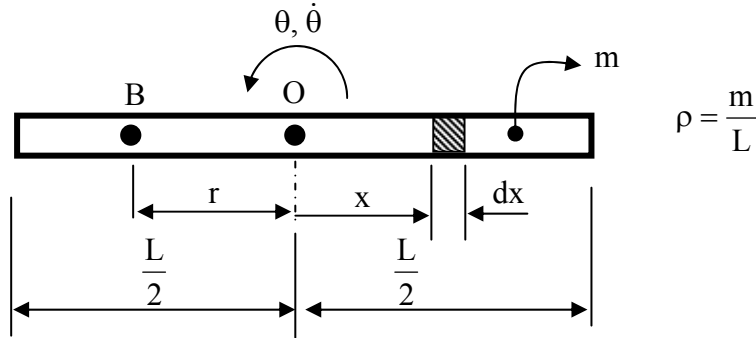
Titreşim sistemi elemanlarına ait benzer denklemler dönme hareketi için de yazılabilir. Dönme hareketinde dönel dirençlik (k_θ), kütle atalet momenti (I), ve dönel sönüm (c_θ) kavramları mevcuttur. Dönüş hareketi yapan titreşim sistemlerinde dış zorlamalar moment girdileri şeklindedir.

Disk tipi kütle elemanlarının kütle atalet momentleri:

Titreşim sistemlerindeki karmaşık geometrilere ait kütle atalet momentleri günümüz katı modelleme programları ile hesaplanabilir. Bununla birlikte disk tipi yapıların kütle atalet momentleri disk kütlesi ve yarıçapına bağlı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir. Diskler sadece belirli bir eksen etrafında dönüş hareketi yapabilecekleri gibi, hem dönme hem de ötelenme hareketi yapabilirler. Bu durumda, diskin kütle atalet momenti ile birlikte kütle sinin de dikkate alınması gereklidir.



Titreşim yapan mekanik sistemlerde homojen ince çubuk tipi elemanlar sıkça kullanılmaktadır. Bu elemanlar belirli bir noktasından geçen eksen etrafında dönüş hareketi yapabilecekleri gibi, bir düzlem içerisinde hem öteleme hem de dönme hareketi yapabilirler. Sadece dönüş hareketi yaptıklarında dönme noktasından geçen eksen etrafındaki kütle atalet momentleri, hem dönme hem de öteleme hareketi yaptıklarında ise hem ötelenen çubuk kütlesi hem de çubuğun kütle merkezinden geçen eksen etrafındaki kütle atalet momenti dikkate alınır.



$$I_O = \int_{-L/2}^{L/2} \rho x^2 dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{1}{12} m L^2$$

Homojen ince çubuk şekilde görülen bir B noktası etrafında dönüyor ise, dönüş eksenine göre kütle atalet momentleri paralel eksenler teoremi (Steiner teoremi) ile hesaplanabilir.

$$I_B = I_O + m r^2$$

Dönme hareketi yapan bir çubuk için kinetik enerji ifadesi

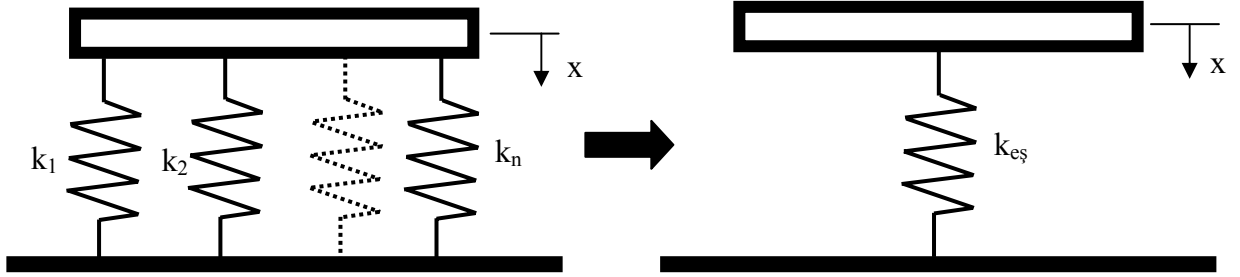
$$E_k = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2$$

Burada I dönme noktasından geçen eksen etrafındaki kütle atalet momenti, I_G kütle merkezinden geçen eksen etrafındaki kütle atalet momenti, \dot{x}_G kütle merkezinin hızıdır.

Esnek eleman konfigürasyonları:

Titreşim yapan mekanik sistemlerde potansiyel enerji depolayan esnek elemanların paralel ve seri olmak üzere farklı konfigürasyonları bulunabilir. Bu durumlarda eşdeğer direngenliklerin elde edilmesi gereklidir. Seri ve paralel bağlantı durumları için eşdeğer hesapları aşağıdaki gibi ifade edilir.

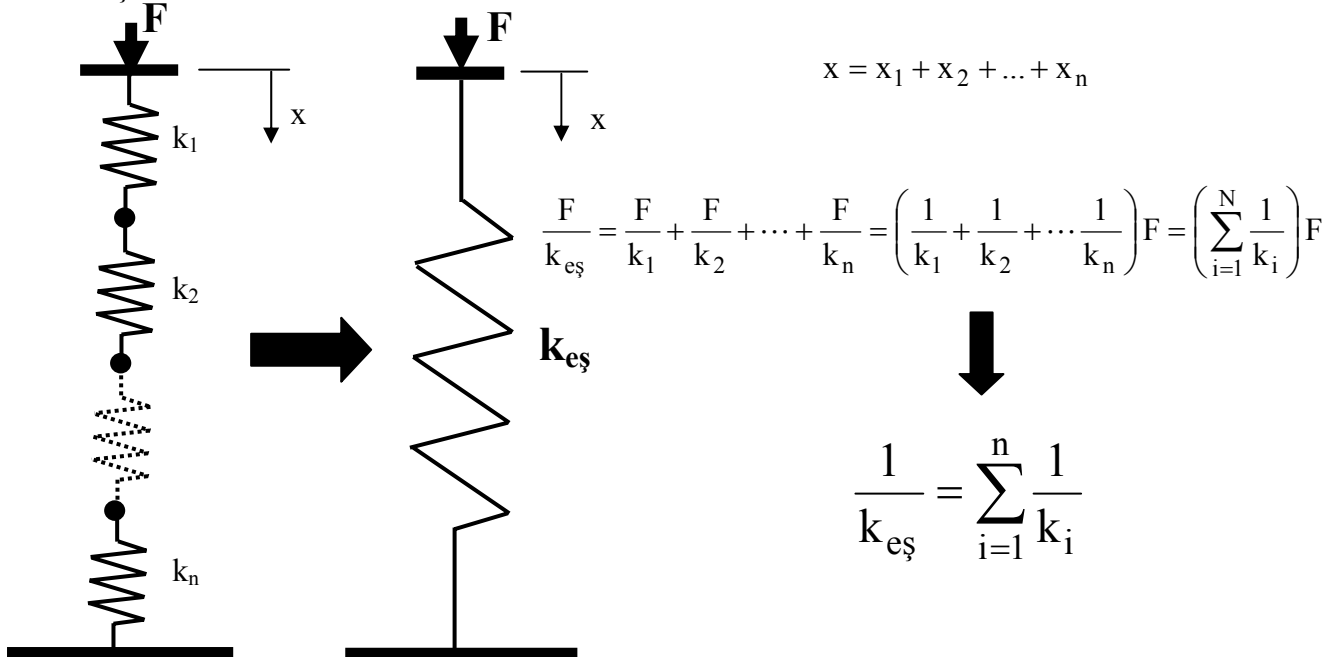
Paralel Bağlantı: Bir mekanik sistemde paralel yay konfigürasyonu söz konusu ise eşdeğer yay katsayısı şu şekilde hesaplanabilir.



Paralel bağlantıda tüm yaylardaki çökme eşittir ve x değerine sahiptir. Dolayısı ile yayların tepki kuvvetleri toplanır.

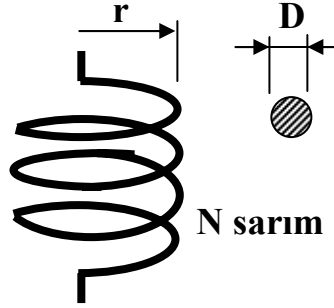
$$\sum F = k_1 x + k_2 x + \dots + k_n x = (k_1 + k_2 + \dots + k_n) x = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x = k_{eş} x \rightarrow k_{eş} = \sum_{i=1}^n k_i$$

Seri bağlantıda tüm yaylardaki kuvvet aynı olup toplam çökme tüm yaylardaki çökmelerin toplamına eşittir.



Helisel yayların yay katsayıları:

Bir helisel yayın yay katsayısı yay malzemesine ait malzeme özelliği ile yay geometrik boyutlarına bağlıdır.



$$k = \frac{GD^4}{64r^3 N}$$

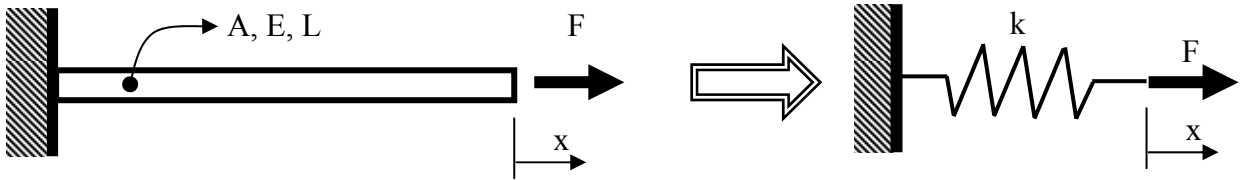
$$G = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

E: Elastisite modülü
G: Kayma modülü
 ν : Poisson oranı

YAY OLARAK KULLANILAN YAPISAL ELEMANLAR

Titreşen mekanik sistemlerde bulunan yapısal elemanlar çoğu kez yay elemanı gibi davranmaktadırlar. Kiriş tipi elemanlar bu tip yapısal elemanlara örnektir. Bu elemanlara ait direngenlik ifadeleri kuvvet-şekil değiştirme ilişkileri ile elde edilebilir.

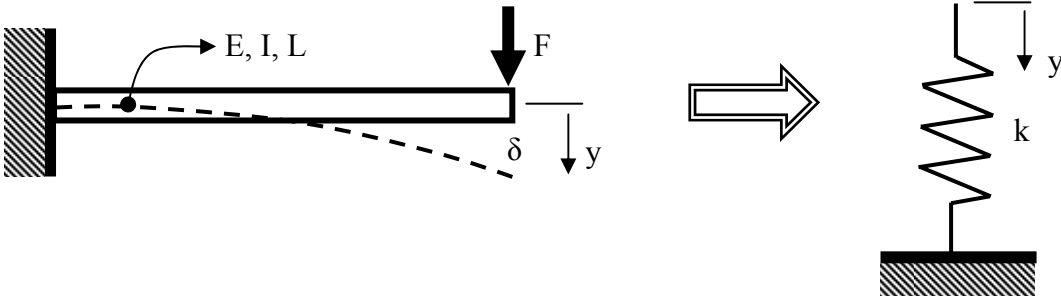
Eksenel titreşimler için direngenlik ifadesi.



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{x}{L}$$

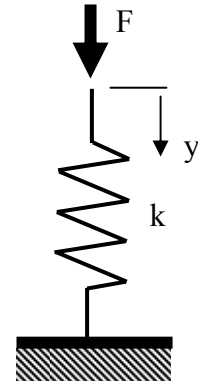
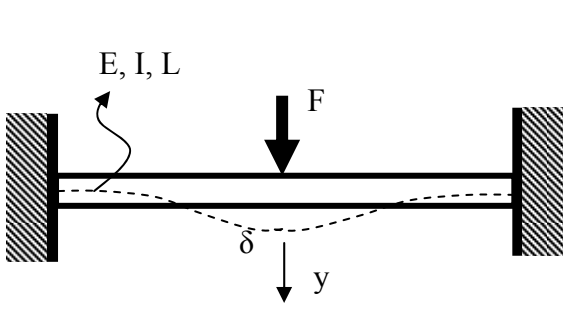
$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E\frac{x}{L} \rightarrow x = \frac{FL}{EA} \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{F}{\frac{FL}{EA}} = \frac{EA}{L}$$

Eğilme titreşimleri için direngenlik ifadeleri



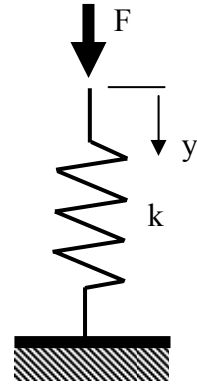
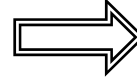
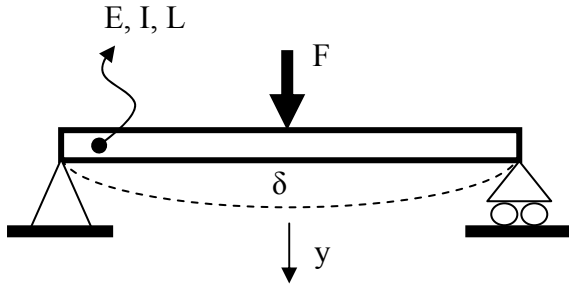
$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x) \Rightarrow \delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\frac{FL^3}{3EI}} = \frac{3EI}{L^3}$$



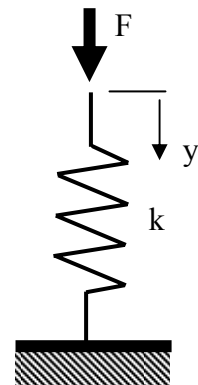
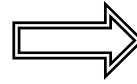
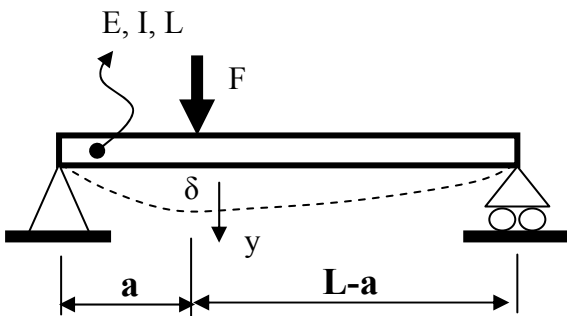
$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x) \Rightarrow \delta = \frac{FL^3}{192EI}$$

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\frac{FL^3}{192EI}} = \frac{192EI}{L^3}$$



$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x) \Rightarrow \delta = \frac{FL^3}{48EI}$$

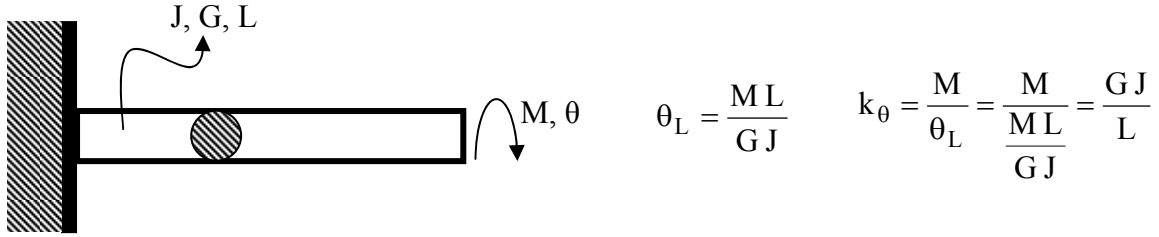
$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\frac{FL^3}{48EI}} = \frac{48EI}{L^3}$$



$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x) \Rightarrow \delta = \frac{Fa^2(L-a)^2}{3EIL}$$

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\frac{Fa^2(L-a)^2}{3EIL}} = \frac{3EIL}{a^2(L-a)^2}$$

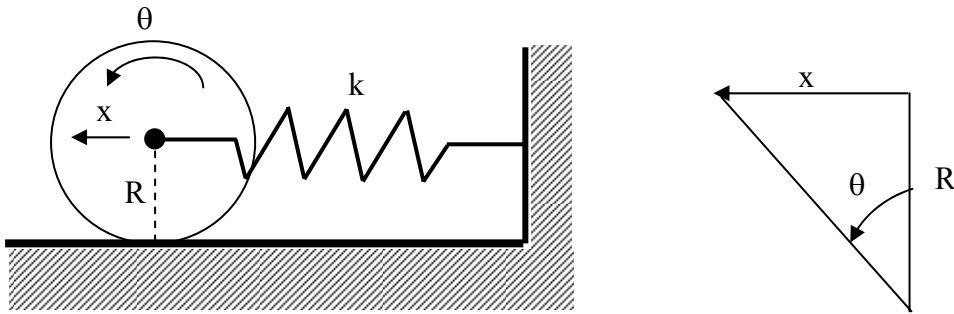
Torsiyonel Sistemler



Burada J kesit kutupsal (polar) alan atalet momentidir.

TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN DOĞRUSALLAŞTIRILMASI (KÜÇÜK YER DEĞİŞTİRMELER)

Titreşim problemleri, küçük ötelemeler ve küçük yer dönmeler kabulü ile doğrusal diferansiyel denklemler ile incelenmektedir. Büyük yer değiştirmeler söz konusu olduğunda doğru çözüm için diferansiyel denklemlerin nonlinear formları göz önünde bulundurulmalı ve çözümler bu şekilde yapılmalıdır.



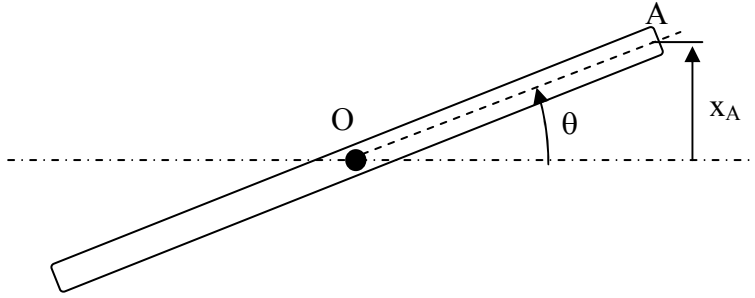
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{R} \rightarrow x = R \frac{\sin \theta}{\cos \theta} . \text{ Burada } \sin \theta \text{ ifadesi Taylor serisine açılır ise}$$

$\sin \theta = \frac{\theta^0}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$, $\theta \ll 1$ için, diğer θ 'nın yüksek dereceden kuvvetleri sıfıra çok yakın değerler alır. Dolayısı ile küçük açısız yer değiştirmeler için $\sin \theta \approx \theta$ alınabilir. $\cos \theta$ ifadesi için Taylor serisi yazılır ise

$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$, $\theta \ll 1$ için, diğer θ 'nın yine yüksek dereceden kuvvetleri sıfıra çok yakın değerler alır. Dolayısı ile küçük açısız yer değiştirmeler için $\cos \theta \approx 1$ alınabilir.

Bu durumda $x \approx R \frac{\theta}{1} = R\theta$ yazılabilir.

Bir nokta etrafında dönüş hareketine sahip kirişler için de benzer ifadeler geçerlidir.



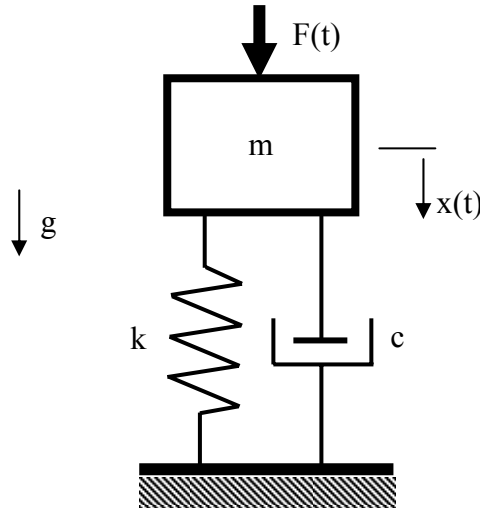
$$\sin \theta = \frac{x_A}{OA}$$

$$x_A = OA \sin \theta = OA \theta$$

HAREKET DENKLEMİ OLUŞTURMA YÖNTEMLERİ:

Titreşim analizi yapılacak sistemin matematik modelinin oluşturulmasını takiben literatürde mevcut yöntemlerden biri kullanılarak sistemin hareketini tanımlayan diferansiyel denklemler (hareket denklemleri) oluşturulur. Hareket denklemleri oluşturulur iken farklı yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden sık kullanılanları aşağıda verilmiştir.

Bu bölümde mekanik titreşim problemlerinde temel olarak ele alınan yay-kütle sistemi ele alınacaktır.



1. Newton'un 2. yasası ile: Şekilde görülen sistem tek serbestlik dereceli sistemdir ve m kütesinin hareketi x koordinatı ile tanımlanabilir. Newton'un 2. yasası gereği cisme etkiyen kuvvetlerin toplamı cismin kütlesi ile ivmesinin çarpımına eşittir.

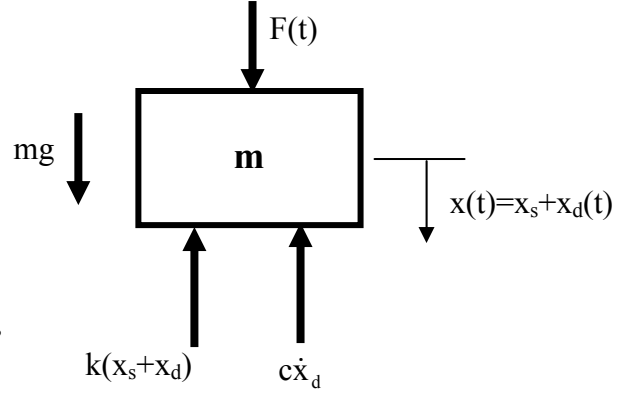
m kütesi k yayı üzerine konulmadan önce yay şekil değiştirmemiş serbest konumdadır. mg ağırlığındaki kütle yay üzerine yerleştirildikten sonra yay bir miktar statik çökmeye uğrar ve F(t) dış zorlaması ile bu çökmeyen üzerinde x dinamik yer değiştirmeleri oluşur. Dolayısı ile m kütesinin toplam yer değiştirme ifadesi $x(t) = x_s + x_d$ şeklinde statik ve dinamik yer değiştirmelerinin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$$x(t) = x_s + x_d(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_d$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_d$$

olarak yazılabilir.



Cismin Serbest Cisim Diyagramı çizilir ise,

Newton'un 2. yasası gereği öteleme yapan sistemler için

$$\sum F = m \ddot{x}$$

Dönme hareketi yapan sistemler için

$$\sum M = I \ddot{\theta}$$

Aşağı yön pozitif kabul edilerek

$$F(t) + mg - k(x_s + x_d) - c\dot{x}_d = m\ddot{x} \rightarrow F(t) + mg - k \frac{mg}{k} - kx_d - c\dot{x}_d = m\ddot{x}_d$$

Buradan m kütlesi için hareket denklemini

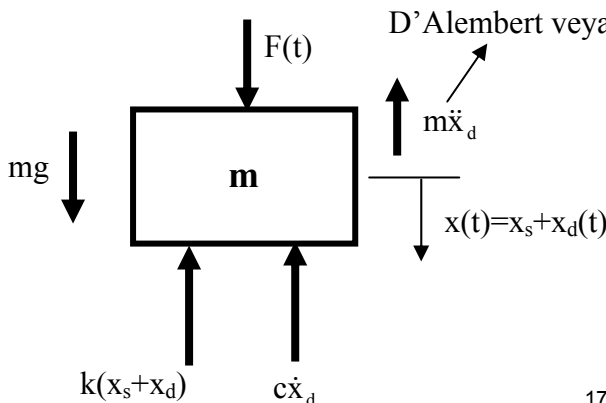
$$m\ddot{x}_d + c\dot{x}_d + kx_d = F(t) \text{ şeklindedir.}$$

Görüldüğü gibi hareket denkleminde cisme etki eden yer çekimi kuvveti ve yayda oluşan statik çökme reaksiyonları bulunmamakta, hareket denklemini m kütlesinin statik denge konumundan (yayın çökmüş hali) itibaren ölçülen x_d dinamik yer değiştirmelerini içermektedir. Dolayısıyla yer çekimine karşı çalışan sistemlerde kütle yer değiştirmesi statik denge konumundan ölçülür ve titreşim hareketini tanımlayan yer değiştirme ifadesi $x=x_d$ dir. Dolayısıyla hareket denklemini

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \text{ şeklinde yazılır.}$$

2. Dinamik Denge Yöntemi (D'Alembert Prensi): Bu yöntemde cisme etki eden atalet kuvvetleri de serbest cisim diyagramında gösterilir ve cisim statik dengede kabul edilerek

$$\sum F = 0 \text{ veya } \sum M = 0 \text{ eşitlikleri kullanılır.}$$



$$F(t) + mg - k \frac{mg}{k} - kx_d - c\dot{x}_d - m\ddot{x}_d = 0$$

yine $x=x_d$ ile

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Olarak elde edilir.

3. Enerji Yöntemi : Bu metod ile enerjinin korunumu prensibi uygulanır. Bir sistemin toplam enerjisinin artış hızı sisteme verilen güce eşittir.

$$\frac{dE_t}{dt} = P_{net}$$

Burada E_t sistemin potansiyel ve kinetik enerjilerinin toplamı, P_{net} ise sisteme verilen net toplam güç olup; dış kuvvetler ve momentlerin sisteme verdikleri güç + işaretli, sistemin dışarıya verdiği mekanik güç ve sönümleyici elemanlar tarafından çevreye yayılan ısı gücü – işaretlidir.

$$P_{net} = \sum P_g - \sum P_v - \sum P_d$$

↙

Sisteme verilen
mekanik
güçlerin toplamı

↘

Sistemin
dışarıya verdiği
mekanik
güçlerin toplamı

↘

Sönümleyici
elemanlardan dışa
atılan ısıl güçlerin
toplamı

Yay kütle sistemi için bu ifadeleri yazar isek (statik denge konumu etrafındaki hareket ele alıyoruz)

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, E_p = \frac{1}{2} kx^2, E_t = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2, P_{net} = F(t)\dot{x} - c\dot{x}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = F(t)\dot{x} - c\dot{x}\dot{x}$$

$$m \dot{x} \ddot{x} + kx\dot{x} = F(t)\dot{x} - c\dot{x}\dot{x} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \text{ olarak elde edilir.}$$

4. Lagrange Yöntemi: Bu yöntemde de incelenen sisteme ait kinetik ve potansiyel enerjiler dikkate alınır. Ayrıca Sanal İş ilkesi ile dış kuvvetlerin ve sönüm kuvvetlerinin sistemin genel koordinatlarında gerçekleştirmiş oldukları sanal işler dikkate alınarak türetilen genel kuvvetler hareket denkleminin türetilmesi için kullanılır.

Sisteme ait Lagrange ifadesi kinetik enerji ile potansiyel enerji farkına eşittir.

$$L = E_k - E_p$$

Kinetik enerji-potansiyel enerji farkı aşağıdaki Lagrange denklemine yazılarak ele alınan sisteme ait hareket denklemi elde edilebilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Lagrange ifadesi açılır ise Lagrange denklemi aşağıdaki formda elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$$

Burada q_i bir sistemin i . genel koordinatını, Q_i ise bu koordinata etki eden kuvvetlerin toplamını (Genel Kuvvet) ifade eder. Genel kuvvet ifadesi Sanal İş ile elde edilir.

Mühendislik sistemlerinde genel olarak potansiyel enerjinin genel koordinat hızı ve kinetik enerjinin de genel koordinat ile ilişkisi olmadığından Lagrange denklemindeki bu terimler sıfır alınarak, bu ders kapsamında incelenecek mekanik sistemler için Lagrange denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$$

Bu denklem öteleme yapan sistemler için bir kuvvet, dönme yapan sistemler için ise bir moment dengesidir.

Genel kuvveti elde etmek için dış zorlamaların ve sönümleyici kuvvetlerin genel koordinatlar üzerindeki sanal işleri dikkate alınır. Genel koordinatlarda zamandan bağımsız olarak küçük değişimler dikkate alınarak (δ) bu kuvvetlerin yaptığı iş

$\delta W = F(t)\delta q_i - c\dot{q}_i\delta q_i$ ifadesi yazılabilir. Genel olarak sanal iş ifadesi $\delta W = Q_i\delta q_i$ yazılarak ilgili genel koordinata ait Genel Kuvvet ifadesi oluşturulmuş olur.

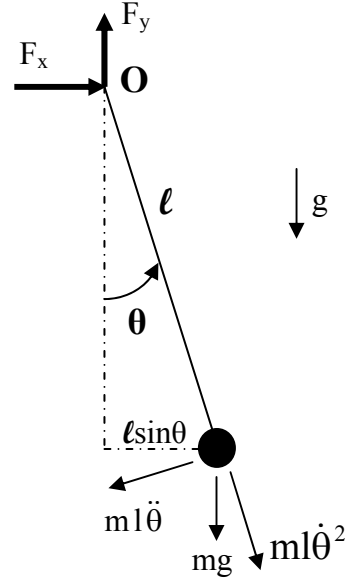
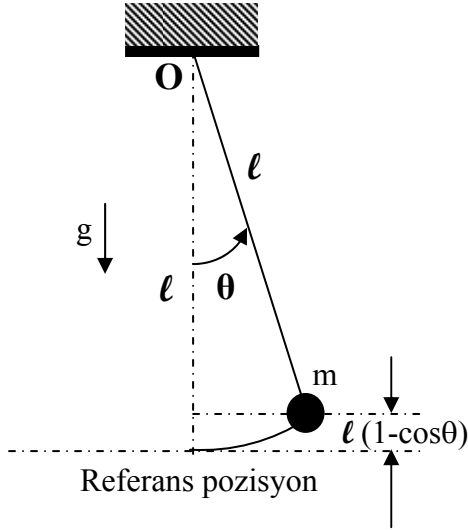
Örnek alınan yay kütle istemi için

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, E_p = \frac{1}{2}kx^2, \delta W = F(t)\delta x - c\dot{x}\delta x = \underbrace{[F(t) - c\dot{x}]}_{Q_x}\delta x$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x} \right) + kx = F(t) - c\dot{x} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \text{ diferansiyel denkleminde ulaşılır.}$$

Örnek: Basit Sarkaç İçin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi:

Aşağıda verilen basit sarkaç için hareket denklemini D'Alembert ve Lagrange yöntemleri ile elde edelim.



Basit sarkaç dönüş hareketine sahip bir mekanik sistemdir. Atalet kuvvetleri ve sisteme etki eden diğer kuvvetler SCD'da gösterilmiştir. O noktasına göre toplam moment sıfıra eşitlenerek. Saat ibresi tersi yön pozitif alınarak

$$\sum M_o = 0$$

$$-ml\ddot{\theta}l - mgl\sin\theta = 0 \rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \sin\theta \approx \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Basit sarkaç harmonik bir hareket yapmaktadır. Dolayısı ile

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$ kabulü ile $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t)$ ifadeleri denklemde yerine yazılır ise basit sarkacın yapacağı harmonik hareketin açısal frekansı

$$\left[\frac{g}{l} - \omega^2 \right] \theta_0 \sin(\omega t) = 0 \rightarrow \frac{g}{l} - \omega^2 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ rad/s olarak elde edilir.}$$

Görüldüğü gibi basit sarkaç için salınım hareketi sarkaç boyundan etkilenmektedir.

Lagrange yöntemi ile hareket denklemi:

Basit sarkaç probleminde m kütesinin kinetik enerjisi

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 \text{ dir.}$$

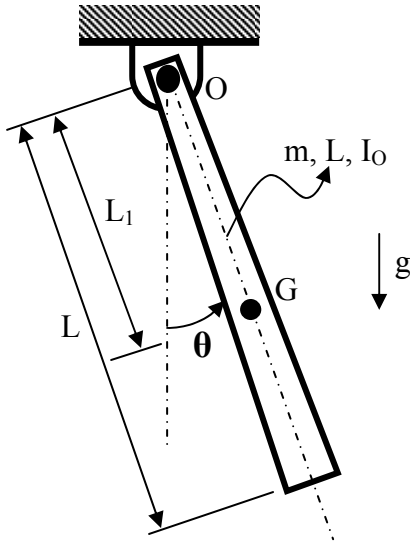
Potansiyel enerji ifadesi

$E_p = mgl(1 - \cos\theta)$ dir. Sarkaç üzerinde dış zorlama veya sönüm yoktur.

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) + mgl\sin\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \rightarrow \sin\theta \approx \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnekler:

Örnek1: Şekilde gösterilen sarkaç için (compound pendulum) hareket denklemini elde ediniz, doğal frekansını belirleyiniz.



$$E_k = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \quad E_p = m g L_1 (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$I_O \ddot{\theta} + m g L_1 \sin \theta = 0$$

I_O sarkacın dönme noktasına göre kütle atalet momentidir.

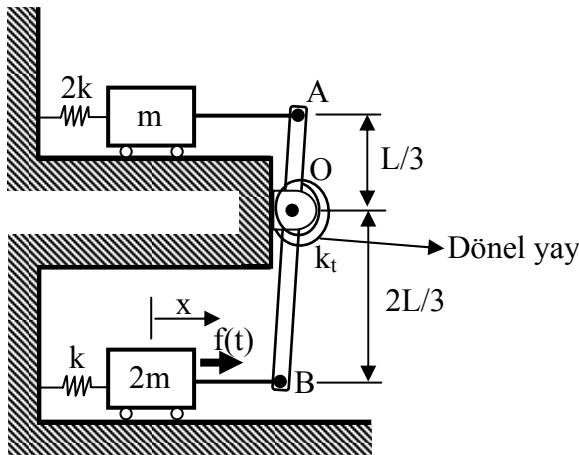
Küçük açısal yer değiştirmeler için $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{m g L_1}{I_O} \theta = 0$$

Serbest titreşimlerin formu saf harmonik şeklindedir $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega_n t$ ve $\ddot{\theta}(t) = -\omega_n^2 \theta_0 \sin \omega_n t$ 'dir. Bu ifadeler hareket denkleminde yerine yazılır ise,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m g L_1}{I_O}} \text{ (rad/sn)}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m g L_1}{I_O}} \text{ (Hz) olarak elde edilir.}$$

Örnek 2: Şekilde verilen tek serbestlik dereceli sistemin hareket denklemini yazınız ve doğal frekans ifadesini elde ediniz.



$$x_B = x$$

$$\theta = \frac{3x}{2L}$$

$$x_A = \theta \frac{L}{3} = \frac{x}{2}$$

İnce homojen bir çubuk için

$$I_O = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} m L^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_O \left(\frac{3}{2L} \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(2m + \frac{m}{4} + \frac{m}{4} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{5m}{2} \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_t\left(\frac{3x}{2L}\right)^2 + \frac{1}{2}2k\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[k + \frac{9k_t}{4L^2} + \frac{k}{2}\right]x^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3k}{2} + \frac{9k_t}{4L^2}\right]x^2$$

$$\delta W = f(t)\delta x$$

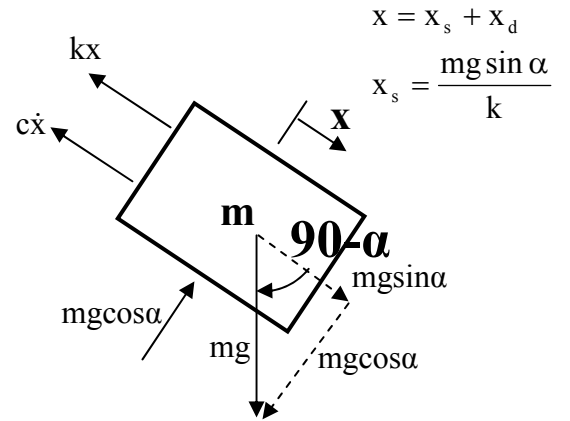
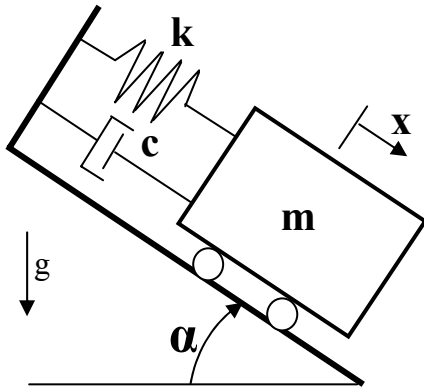
Lagrange denklemi uygulandığında

$$\frac{5m}{2}\ddot{x} + \left[\frac{3k}{2} + \frac{9k_t}{4L^2}\right]x = f(t)$$

Doğal frekans serbest titreşimlerin frekansı olduğu için dış zorlama yoktur ve titreşim hareketi frekansı sistemin doğal frekansına eşit olan harmonik bir harekettir. Dolayısıyla ile yukarıdaki tek serbestlik dereceli sistemin doğal frekansı

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{3k}{2} + \frac{9k_t}{4L^2}}{\frac{5m}{2}}} \text{ (rad/sn)}$$

Örnek: Şekilde verilen tek serbestlik dereceli sistemin hareket denklemini elde ediniz.

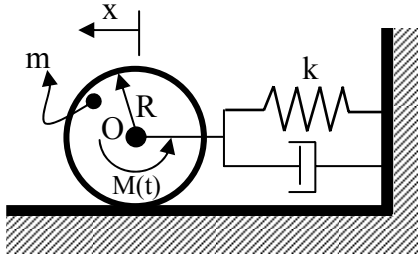


Newton'un 2. yasasına göre

$$\begin{aligned} -c\dot{x}_d - k(x_s + x_d) + mg\sin\alpha &= m\ddot{x}_d \\ -c\dot{x}_d - k\frac{mg\sin\alpha}{k} - kx_d + mg\sin\alpha &= m\ddot{x}_d \end{aligned} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Koordinat statik denge konumundan itibaren ölçüldüğünde yerçekiminin etkisi yoktur.

Örnek: Şekildeki tek serbestlik dereceli sistem için hareket denklemini elde ediniz.



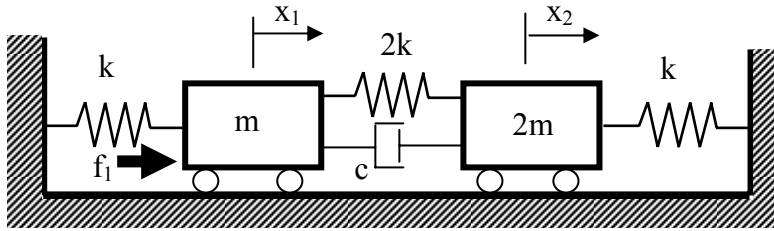
$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{R} m R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\delta W = M(t) \delta \left(\frac{x}{R} \right) - c \dot{x} \delta x$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{x} + \frac{1}{2} m \dot{x} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = kx, \quad Q_x = \frac{1}{R} M(t) - c \dot{x}$$

Sisteme ait hareket denklemini $\frac{3}{2} m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = \frac{1}{R} M(t)$

Örnek: Şekildeki iki serbestlik dereceli sisteme ait hareket denklemlerini elde ediniz.



$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 2m \dot{x}_2^2, \quad E_p = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} 2k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2,$$

$$\delta W = f_1 \delta x_1 - c (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \delta (x_2 - x_1)$$

Çok serbestlik dereceli sistemlerde Lagrange denklemini her bir genel koordinat için yazılır. x_1 için Lagrange denklemini yazılır ise,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = Q_{x_1}$$

$$m \ddot{x}_1 + kx_1 - 2k(x_2 - x_1) = f_1 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \rightarrow m \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 - c \dot{x}_2 + 3kx_1 - 2kx_2 = f_1$$

x_2 için Lagrange denklemini yazılır ise,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = Q_{x_2}$$

$$2m \ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) + kx_2 = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \rightarrow 2m \ddot{x}_2 - c \dot{x}_1 + c \dot{x}_2 - 2kx_1 + 3kx_2 = 0$$

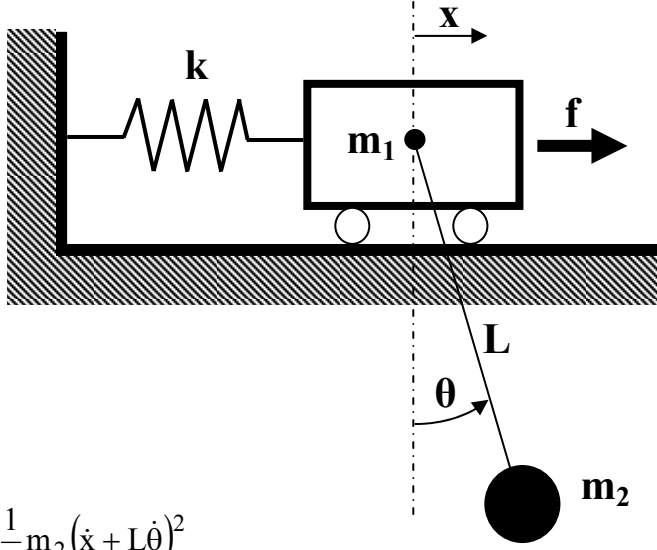
Hareket denklemleri matris formunda yazılır ise,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

Kütle Matrisi Sönüm Matrisi Direngenlik Matrisi Zorlama Vektörü

Lineer sistemler için Kütle, Sönüm ve Direngenlik matrisleri simetriktir.

Örnek: Şekildeki iki serbestlik dereceli sisteme ait hareket denklemlerini elde ediniz.



$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} + L\dot{\theta})^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + m_2gL(1 - \cos\theta)$$

$$\delta W = f\delta x$$

Lagrange denklemini x koordinatı için uygulanır ise

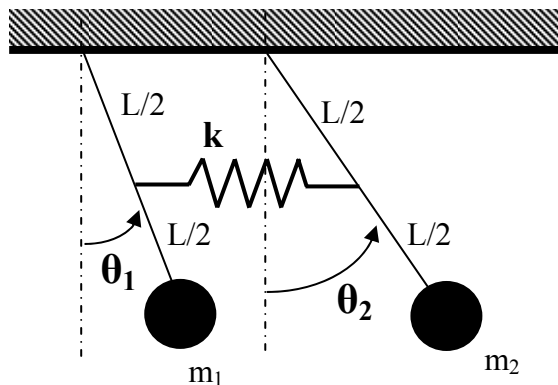
$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x} + m_2\dot{x} + m_2L\dot{\theta}) + kx = f \rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2L\ddot{\theta} + kx = f$$

Lagrange denklemini theta koordinatı için uygulanır ve küçük açisal yer değiştirmeler kabulü ile

$$\frac{d}{dt}(m_2L\dot{x} + m_2L^2\dot{\theta}) + m_2gL\sin\theta = 0 \rightarrow m_2L^2\ddot{\theta} + m_2L\ddot{x} + m_2gL\theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2L \\ m_2L & m_2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2gL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki iki serbestlik dereceli sistemin hareket denklemlerini yazınız.



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (L\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (L\dot{\theta}_2)^2$$

$$E_p = m_1 g L (1 - \cos \theta_1) + m_2 g L (1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{2} \theta_2 - \frac{L}{2} \theta_1 \right)^2$$

$$\delta W = 0$$

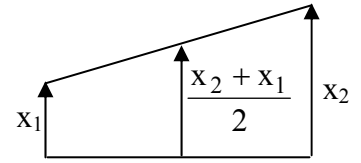
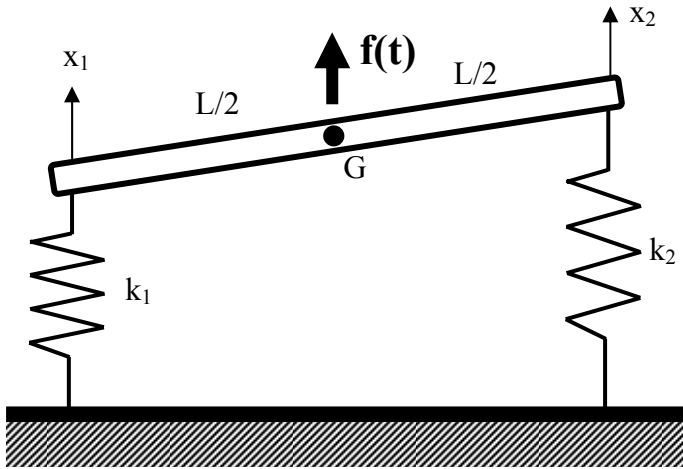
Lagrange denklemi θ_1 için uygulanır ise,

$$m_1 L^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g L \sin \theta_1 - k \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} \theta_2 - \frac{L}{2} \theta_1 \right) = 0 \rightarrow m_1 L^2 \ddot{\theta}_1 + k \frac{L^2}{4} \theta_1 - k \frac{L^2}{4} \theta_2 + m_1 g L \theta_1 = 0$$

$$m_2 L^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g L \sin \theta_2 + k \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} \theta_2 - \frac{L}{2} \theta_1 \right) = 0 \rightarrow m_2 L^2 \ddot{\theta}_2 - k \frac{L^2}{4} \theta_1 + k \frac{L^2}{4} \theta_2 + m_2 g L \theta_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 L^2 & 0 \\ 0 & m_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k \frac{L^2}{4} + m_1 g L & -k \frac{L^2}{4} \\ -k \frac{L^2}{4} & k \frac{L^2}{4} + m_2 g L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki iki serbestlik dereceli sistemin hareket denklemlerini yazınız.



$$x_G = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} I_G \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2, \quad \delta W = f \delta \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)$$

Lagrange denklemi x_1 için uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2} \right) \right) - \frac{I_G}{L} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right) \right] + k_1 x_1 = \frac{f}{2}$$

$$\frac{m}{4}\ddot{x}_1 + \frac{m}{4}\ddot{x}_2 + \frac{1}{12}mL^2 \frac{1}{L^2}\ddot{x}_1 - \frac{1}{12}mL^2 \frac{1}{L^2}\ddot{x}_2 + k_1x_1 = \frac{f}{2}$$

$$\left(\frac{m}{4} + \frac{m}{12}\right)\ddot{x}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{m}{12}\right)\ddot{x}_2 + k_1x_1 = \frac{f}{2} \rightarrow \frac{m}{3}\ddot{x}_1 + \frac{m}{6}\ddot{x}_2 + k_1x_1 = \frac{f}{2}$$

Lagrange denklemi x_2 için uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2} \right) \right) + \frac{I_G}{L} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{L} \right) \right] + k_2x_2 = \frac{f}{2}$$

$$\frac{m}{4}\ddot{x}_1 + \frac{m}{4}\ddot{x}_2 - \frac{1}{12}mL^2 \frac{1}{L^2}\ddot{x}_1 + \frac{1}{12}mL^2 \frac{1}{L^2}\ddot{x}_2 + k_2x_2 = \frac{f}{2}$$

$$\left(\frac{m}{4} - \frac{m}{12}\right)\ddot{x}_1 + \left(\frac{m}{4} + \frac{m}{12}\right)\ddot{x}_2 + k_2x_2 = \frac{f}{2} \rightarrow \frac{m}{6}\ddot{x}_1 + \frac{m}{3}\ddot{x}_2 + k_2x_2 = \frac{f}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} f \\ f \end{Bmatrix}$$

RAYLEIGH YÖNTEMİ : EFEKTİF KÜTLE

Enerji yöntemi sistemdeki noktaların hareketlerinin bilinmesi durumunda gerek toplanmış kütleli, gerekse yaylı kütleli sistemlere uygulanabilir. Birbirleri ile doğrudan ilişkili kütlelere sahip olan sistemlerde sisteme ait kinetik enerji tek bir koordinat hızı kullanılarak yazılabilir ve sistem tek serbestlik derecelidir. Bu durumda kinetik enerji şu şekilde yazılabilir

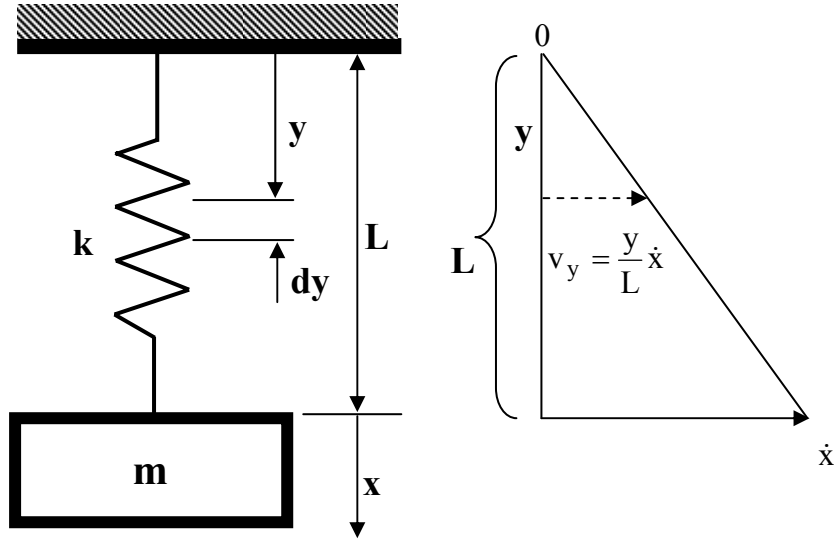
$$E_k = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} \dot{x}^2$$

Burada m_{eff} efektif kütle veya belirli bir noktaya toplanmış kütle olarak adlandırılır. Eğer bu noktadaki direngelik biliniyor ise, sisteme ait doğal frekans şu şekilde hesaplanabilir.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{eff}}}}$$

Yay ve kiriş gibi yaylı sistemlerde, titreşim genliklerinin bilinmesi kinetik enerjinin hesaplanması için gereklidir. Rayleigh, sürekli sistemlerdeki titreşim genliklerinin yaklaşık olarak öngörülebildiği durumlarda, ihmal edilmiş kütlelerin de doğal frekans hesaplarında hesaba katılabileceğini ve daha doğru frekans hesaplamaları yapılabileceğini göstermiştir.

Örnek: Aşağıdaki kütle-yay sistemindeki yayın kütesinin sistemin doğal frekansı üzerindeki etkisini gösteriniz.



Yayın m kütesindeki temas noktasındaki hızı \dot{x} , sabit ucunun ise hızı 0 dir. Sabit uçtan y mesafedeki yay parçasının hızı ise doğrusal hız değişimi kabulü ile

$$v_y = \frac{y}{L} \dot{x}$$

olarak ifade edilebilir.

m_{yay} kütesine sahip yayın titreşim hareketi esnasındaki kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$E_{k_yay} = \frac{1}{2} \int_0^L dm v_y^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{y}{L} \dot{x} \right)^2 \frac{m_{yay}}{L} dy = \frac{1}{2} \frac{m_{yay}}{L^3} \dot{x}^2 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^L = \frac{1}{2} \frac{m_{yay}}{3} \dot{x}^2$$

Kütle ve yay için toplam kinetik enerji ifadesi $E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{yay}}{3} \dot{x}^2$

Yayda depolanan potansiyel enerji ise

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \text{ dir.}$$

Korunumlu bir sistemde sistemin potansiyel enerji ve kinetik enerji toplamının zamana göre değişmediği göz önünde bulundurulur ise

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left[m + \frac{m_{yay}}{3} \right] \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

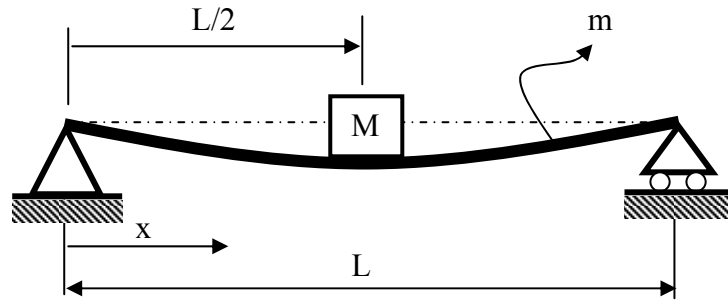
$$\left[m + \frac{m_{yay}}{3} \right] \ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \left[m + \frac{m_{yay}}{3} \right] \ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{\left[m + \frac{m_{yay}}{3} \right]} x = 0$$

Yay kütlesi dikkate alındığında yay-kütle sisteminin doğal frekansı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_{yay}}{3}}} \text{ (rad/sn).}$$

Örnek: Şekilde gösterilen kiriş-kütle sisteminde M kütlesi kirişin orta noktasındaki topaklanmış kütle, m ise kiriş kütlelerini göstermektedir. Bu sistemde kiriş orta noktası için efektif kütle hesaplayınız. Kiriş orta noktasından etki eden P yükü için çökme ifadesi

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \text{ ile verilmektedir.}$$



Kiriş orta noktasındaki bir yükten dolayı oluşan kiriş çökmesi aşağıdaki fonksiyon ile ifade edilebilir.

$$y = y_{\max} \left[\frac{3x}{L} - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad \left(\frac{x}{L} \leq \frac{1}{2} \right)$$

Kirişin kendisine ait maksimum kinetik enerji

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^{L/2} 2 \frac{m}{L} \left(\dot{y}_{\max} \left[\frac{3x}{L} - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \right)^2 dx = \frac{1}{2} 0.4857 m \dot{y}_{\max}^2$$

Dolayısı ile kiriş orta noktası için efektif kütle

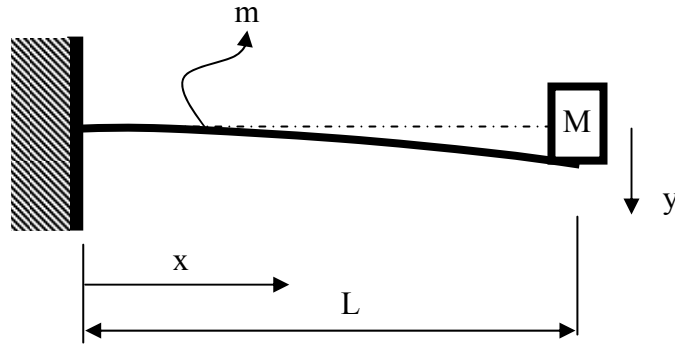
$m_{\text{eff}} = M + 0.4857 m$ dir. Kiriş orta noktasındaki direngenliğin $k = \frac{48EI}{L^3}$ olduğu dikkate alındığında doğal frekans ifadesi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{48EI}{L^3(M + 0.4857m)}} \text{ (rad/sn) dir.}$$

Sadece kiriş düşünülüğünde doğal frekans ifadesi

$$\omega_n = 9.941 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \text{ (rad/sn) dir.}$$

Örnek: Şekildeki ankastre kirişte kiriş uç noktası için tanımlanmış efektif kütle bulunuz ve kirişin doğal frekansını belirleyiniz. Kiriş uç noktasına etki eden P yükü ile bu noktadaki çökme değeri $\delta = \frac{PL^3}{3EI}$ dir.



$$y = y_{\max} \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Kirişin kendisine ait maksimum kinetik enerji

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{2} m \left(\dot{y}_{\max} \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{33}{140} m \dot{y}_{\max}^2$$

M kütlesi ile birlikte kirişin toplam kinetik enerjisi

$$E_{k_max} = \frac{1}{2} \left[M + \frac{33}{140} m \right] \dot{y}_{\max}^2$$

Dolayısı ile kiriş uç noktası için efektif kütle

$m_{\text{eff}} = M + \frac{33}{140} m$ olarak hesaplanır. Kiriş uç noktası için direngenlik değerinin

$k = \frac{3EI}{L^3}$ olduğu dikkate alınır ise kirişe ait doğal frekans ifadesi

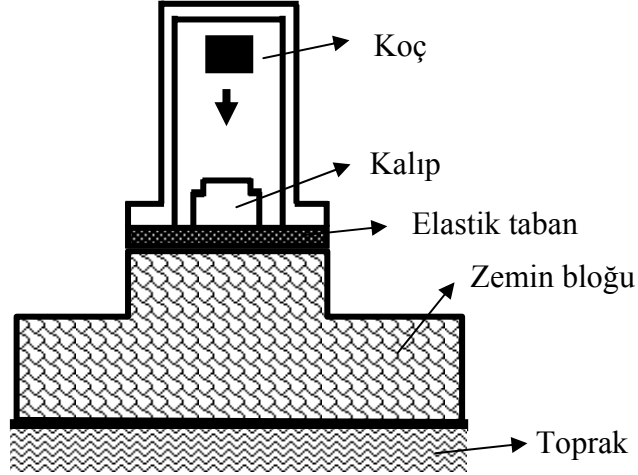
$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI}{L^3 \left(M + \frac{33}{140} m \right)}} \text{ (rad/sn) olarak elde edilir.}$$

Sadece kiriş düşünülüğünde doğal frekans ifadesi

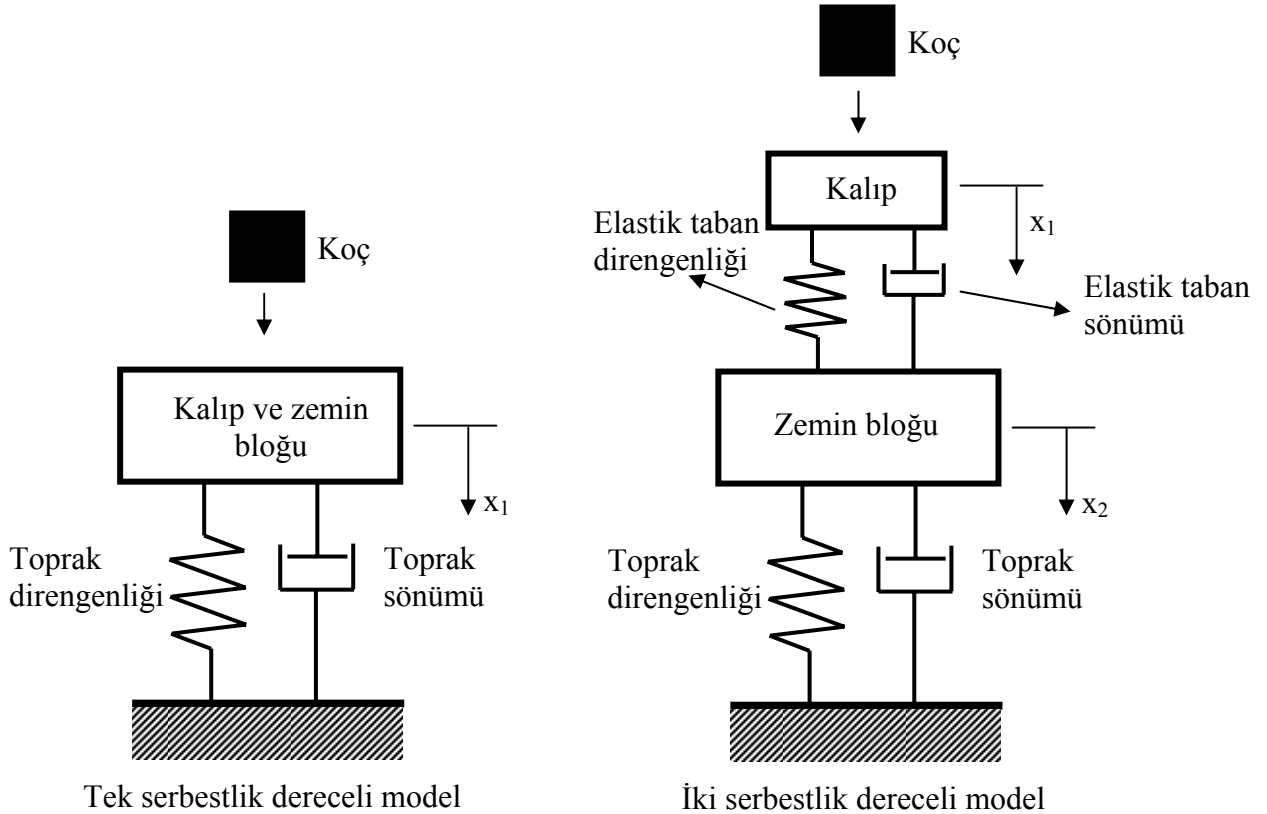
$$\omega_n = 3.567 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \text{ (rad/sn) dir.}$$

Titreşim Sistemlerinin Modellenmesi : Matematik Model

Mühendislik sistemleri ile ilgili titreşim analizlerini gerçekleştirme için öncelikle sistem serbestlik derecelerini yapılacak titreşim analizi ile uyumlu olarak temsil edecek bir matematik modele ihtiyaç vardır. Matematik model ile ilgili daha önce verilen örneklere ek örnekler aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki dövme makinesi için farklı serbestlik dereceli matematik modeller oluşturulabilir.



Dövme kalıbı modeli.

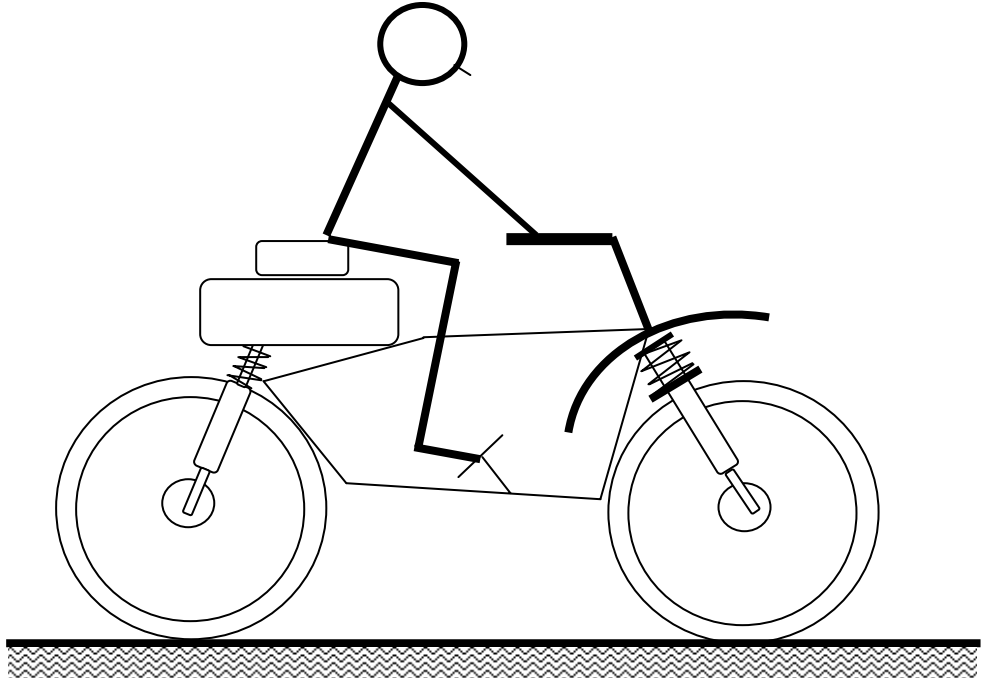


Tek serbestlik dereceli model

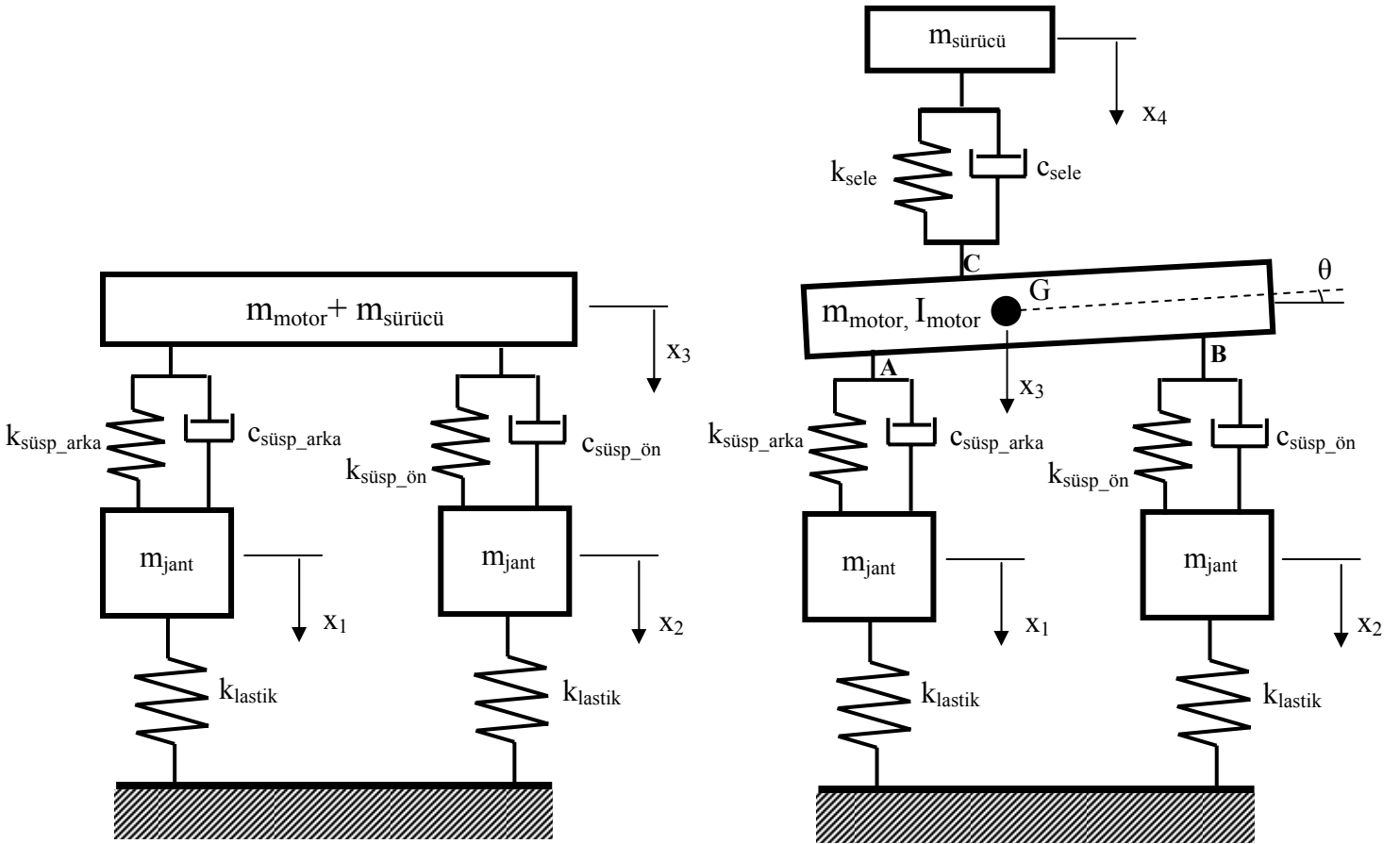
İki serbestlik dereceli model

Aşağıdaki bir motosiklet-sürücü sistemine ait matematik model verilmiştir.

Kaynaklar: *Theory of Vibrations*-W.T.Thomson, *Elements of Vibration Analysis*-L. Meirovitch, *Vibrations of Continuous Systems*-S. Rao, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*-S.G. Kelly, *Vibration Problems in Engineerin*-W.Weaver, S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Engineering Vibrations*-D.J. Inman, *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği*-Yücel Ercan



Motorsiklet-sürücü modeli.

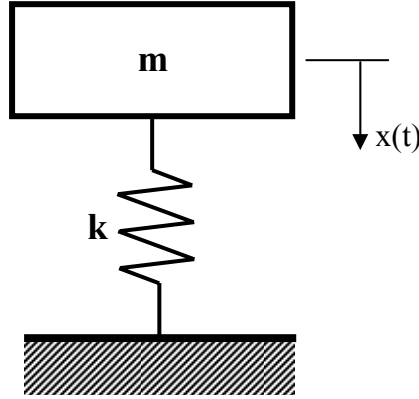


Üç serbestlik dereceli model

Beş serbestlik dereceli model

TİTREŞİM ANALİZİ:**Tek Serbestlik Dereceli Sistemler:*****Tek Serbestlik Dereceli Sönümsüz Bir Sistemin Serbest Titreşimleri:***

Tek serbestlik dereceli sönümsüz bir sistemin hareket denklemi aşağıda verilmiştir.



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Hareket denkleminin çözümü için $x(t) = a e^{st}$ kabulü yapılır ve a ve s sabitleri belirlenir. Kabul edilen çözüm ve türevleri hareket denkleminde yerine konarak, $\ddot{x}(t) = s^2 a e^{st}$

$$[ms^2 + k] a e^{st} = 0 \text{ dir.}$$

Başlangıçta kabul edilen çözümün geçerli ve işe yarar bir çözüm olabilmesi için $a e^{st}$ 'nin sıfırdan farklı olması gereklidir. Bu durumda $a e^{st}$ teriminin çarpanı, karakteristik denklem, sıfıra eşit olmalıdır ve bu denklemi sıfır yapan s değerleri sistemin özdeğerleri olarak adlandırılır ve her iki s değeri de karakteristik denklemi sağlar.

$$ms^2 + k = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i = \pm i \omega_n \rightarrow \text{Tek serbestlik dereceli sistemin serbest titreşimlerinin frekansı } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (rad/s) dir.}$$

Doğal frekans statik çökme değeri kullanılarak da ifade edilebilir.

$$\delta_{\text{statik}} = \frac{mg}{k} \rightarrow k = \frac{mg}{\delta_{\text{statik}}} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{mg}{\delta_{\text{statik}} m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{statik}}}} \text{ (rad/s)} \rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{statik}}}} \text{ (Hz)}$$

Her iki kök de karakteristik denklemi sağladığı için hareket denkleminin genel çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_n t} \text{ veya } x(t) = a_2 e^{-i\omega_n t}$$

Yay-kütle sistemine ait diferansiyel denklem lineer olduğu için yukarıdaki iki çözümün toplamı da hareket denkleminin çözümünü verir.

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_n t} + a_2 e^{-i\omega_n t}$$

Burada a_1 ve a_2 kompleks sabitlerdir.

Trigonometrik fonksiyonlar için Euler ilişkileri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$e^{\mp i\omega t} = \cos \omega t \mp i \sin \omega t$$

$x(t)$ çözümü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x(t) = a_1 [\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t] + a_2 [\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t]$$

$$x(t) = (a_1 + a_2) \cos \omega_n t + i(a_1 - a_2) \sin \omega_n t$$

Yukarıda verilen $x(t)$ çözümü aşağıdaki şekillerde de ifade edilebilir.

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \text{ veya } x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

Burada A , ϕ , A_1 ve A_2 gerçek sabitlerdir. Yukarıda verilen çözümlerdeki katsayılar arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{ve} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)$$

$$A_1 = a_1 + a_2, \quad A_2 = (a_1 - a_2)i$$

$$a_1 = \frac{A_1 - A_2 i}{2}, \quad a_2 = \frac{A_1 + A_2 i}{2}$$

Yukarıda verilen iki çözüm içerisinde bulunan gerçek değerli katsayılar, A , ϕ , A_1 ve A_2 başlangıç şartları kullanılarak $x(t=0)=x_0$ ve $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$.

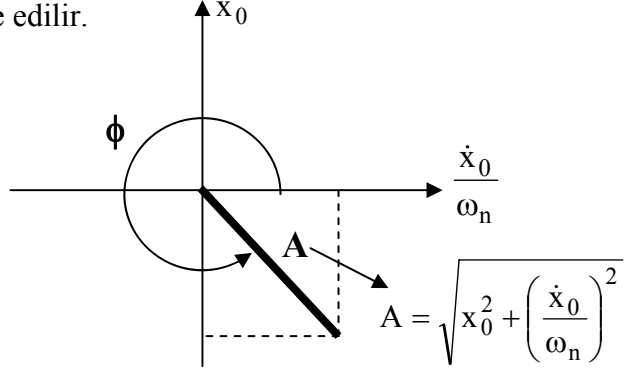
Eğer yay-kütle sisteminde kütleye etki eden bir dış kuvvet yok ise sistem durağan halde kalacaktır. Kütle $t=0$ 'da x_0 kadar yer değiştirilir ise yay kuvveti kx_0 sistem serbest bırakıldığında hareketi sağlayacaktır. Bununla birlikte, $t=0$ 'da kütleye bir başlangıç hızı $v_0 = \dot{x}_0$ verilir ise momentum değişiminden dolayı sistem hareket edecektir. Başlangıç yer

değiştirmesi ve hızı *Başlangıç Şartları (Initial Conditions)* olarak adlandırılır ve bu durumda çözüm aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

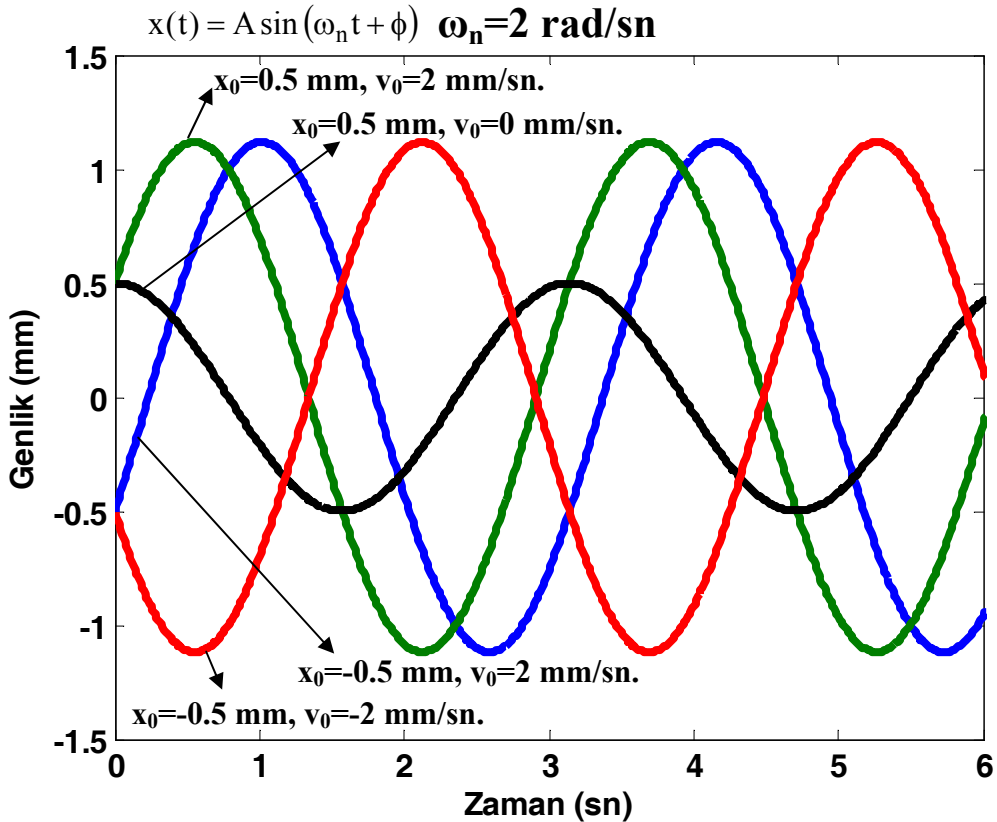
$$x_0 = x(0) = A \sin(\omega_0 + \phi) = A \sin \phi \quad \text{ve} \quad v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n A \cos(\omega_n 0 + \phi)$$

Bu iki denklemden A ve ϕ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2}}{\omega_n}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}$$



$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right) \quad \text{veya} \quad x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \cos\left(\omega_n t - \tan^{-1} \frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}\right)$$



Tek serbestlik dereceli sistemin farklı başlangıç şartları için yer değiştirme cevabı.

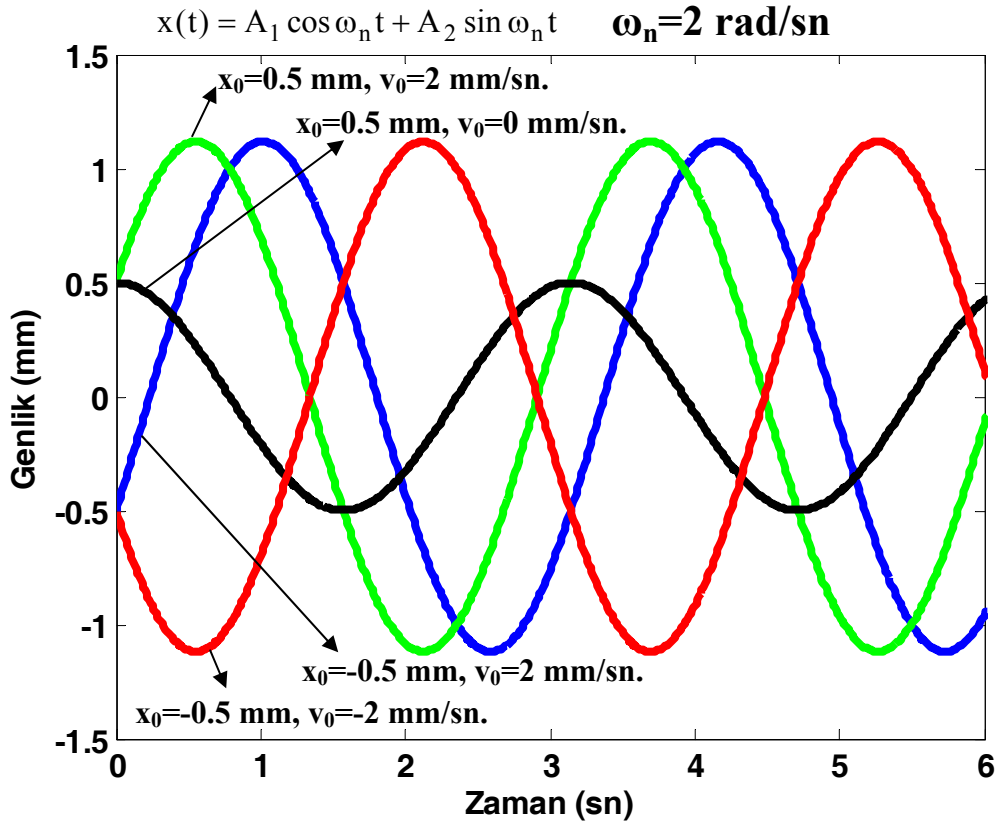
Diğer formdaki çözüm kullanılır ise, $x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$

$t=0$ 'da $x(0)=x_0$ ve $t=0$ 'da $\dot{x}(0) = v_0$

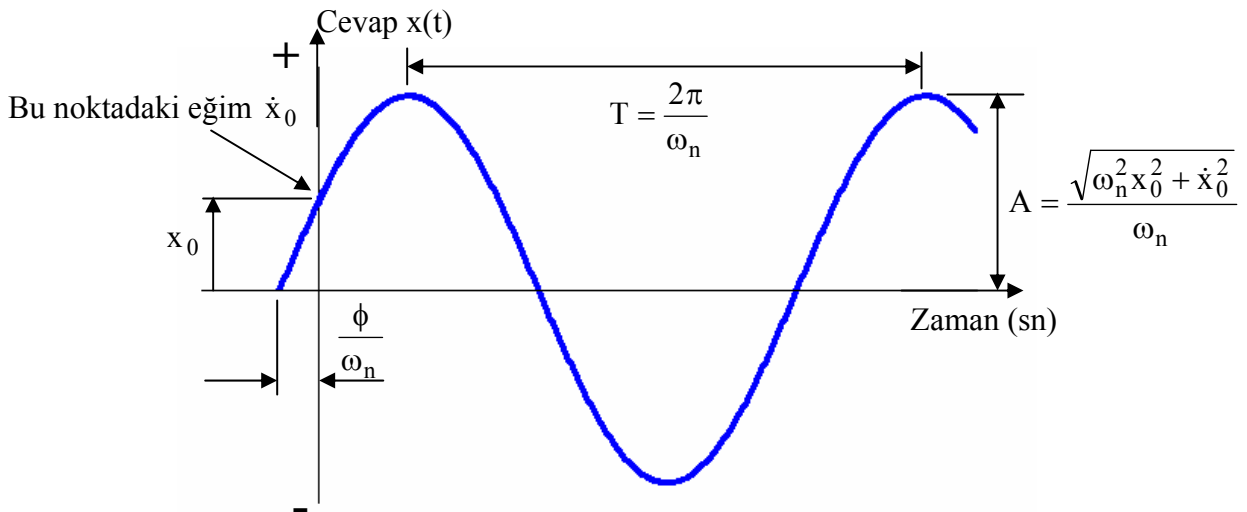
$$x(0) = A_1 \cos \omega_n 0 + A_2 \sin \omega_n 0 \rightarrow A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A_1 \sin \omega_n t + \omega_n A_2 \cos \omega_n t \rightarrow \dot{x}_0 = -\omega_n A_1 \sin \omega_n 0 + \omega_n A_2 \cos \omega_n 0 \rightarrow A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

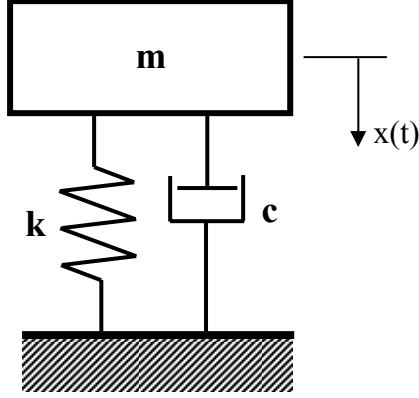


Tek serbestlik dereceli sistemin farklı başlangıç şartları için yer değiştirme cevabı.



Tek Serbestlik Dereceli Sönümlü Bir Sistemin Serbest Titreşimleri:

Tek serbestlik dereceli sönümlü bir sistemin modeli ve hareket denklemi aşağıda verilmiştir.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Hareket denkleminin çözümü için $x(t) = a e^{st}$ kabulü yapılır ve a ve s sabitleri belirlenir. Kabul edilen çözüm ve türevleri hareket denkleminde yerine konarak, $\dot{x}(t) = sa e^{st}$, $\ddot{x}(t) = s^2 a e^{st}$

$$\left[ms^2 + cs + k \right] a e^{st} = 0 \text{ dır.}$$

Başlangıçta kabul edilen çözümün geçerli ve işe yarar bir çözüm olabilmesi için ae^{st} 'nin sıfırdan farklı olması gereklidir. Bu durumda ae^{st} teriminin çarpanı, karakteristik denklem, sıfıra eşit olmalıdır ve bu denklemi sıfır yapan s değerleri sistemin özdeğerleri olarak adlandırılır ve her iki s değeri de karakteristik denklemi sağlar.

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km}$$

Kökler incelendiğinde köklerin gerçek veya kompleks olabileceği görülür. Burada belirleyici olan $c^2 - 4km$ dir. M , c ve k 'nın pozitif sayılar olması göz önünde bulundurulur ise $c^2 - 4km > 0$ için kökler birbirinden farklı gerçek sayılar olacaktır. Eğer $c^2 - 4km < 0$ ise kökler negatif reel kısımlı kompleks bir çift şeklindedir. Eğer $c^2 - 4km = 0$ ise kökler aynı ve negatif gerçek sayılardır.

Bu üç farklı durum incelendiğinde $c^2 - 4km = 0$ için kritik sönüm değerini tanımlamak uygun olacaktır.

$c_{\text{kritik}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$ dir. Kritik sönüm değeri yukarıda bahsedilen üç farklı çözüm için belirleyici bir değerdir.

Sistemde mevcut bulunan sönüm elemanı katsayısının, kritik sönüm katsayısına oranı **sönüm oranı** olarak adlandırılır.

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{kritik}}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Bu tanımlamalar ile karakteristik denklemin kökleri yeniden ifade edilir ise,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Bu tanımlamaya göre sönüm oranının sistem öz değerlerinin reel veya kompleks olacağını belirlediği açıkça görülmektedir.

Sönüm oranına bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

1. Kritik Altı Sönümlü Cevap (Underdamped Response):

Bu durumda sönüm oranı 1'den düşüktür ($0 < \zeta < 1$) ve karekök içerisindeki ifade negatif ve kökler kompleks çift olarak elde edilir.

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}i, s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}i \quad \left(\sqrt{1-\zeta^2}i = \sqrt{(1-\zeta^2)(-1)} = \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

Sönümsüz durum için izlenen yol takip edilerek sönümlü durum için cevap aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(a_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + a_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right)$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[(a_1 + a_2) \cos \omega_d t + i(a_1 - a_2) \sin \omega_d t \right]$$

Burada a_1 ve a_2 kompleks katsayılar olup $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ sistemin sönümlü doğal frekansı olarak adlandırılır.

$A_2 = a_1 + a_2$ ve $A_1 = (a_1 - a_2)i$ olarak seçilerek çözüm aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t)$$

olarak ifade edilebilir. Burada A_1 ve A_2 gerçekte sayılardır. İfadeyi basitleştirmek için yeni tanımlamalar yapılır ise

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{ve faz açısı olarak } \phi = \tan^{-1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right), \quad A_1 = A \cos \phi, \quad A_2 = A \sin \phi$$

$$[\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a + b)]$$

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad \text{olarak ifade edilir.}$$

Yine başlangıç şartlarına göre çözüm aranır ise $t=0$ 'da $x(0)=x_0$ ve $t=0$ 'da $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ise,

$x(t)$ ifadesinde $t=0$ değeri konularak ve başlangıç yer değiştirme şartı kullanılarak

$$x_0 = Ae^0 \sin(\omega_d 0 + \phi) = A \sin \phi$$

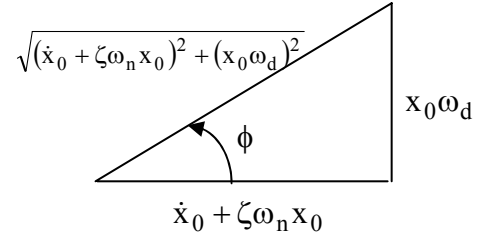
$x(t)$ cevabının zamana göre türevi alınır ve $t=0$ 'da \dot{x}_0 ilk hız şartı ve $A = \frac{x_0}{\sin \phi}$ ifadesi yerine konur ise

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + \omega_d A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$\dot{x}_0 = -\zeta\omega_n \frac{x_0}{\sin \phi} \sin \phi + \omega_d \frac{x_0}{\sin \phi} \cos \phi \rightarrow \dot{x}_0 = -\zeta\omega_n x_0 + \omega_d x_0 \cot \phi$$

Buradan ϕ faz açısı çözülür ise

$$\tan \phi = \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0} \text{ elde edilir ve } \phi = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}$$

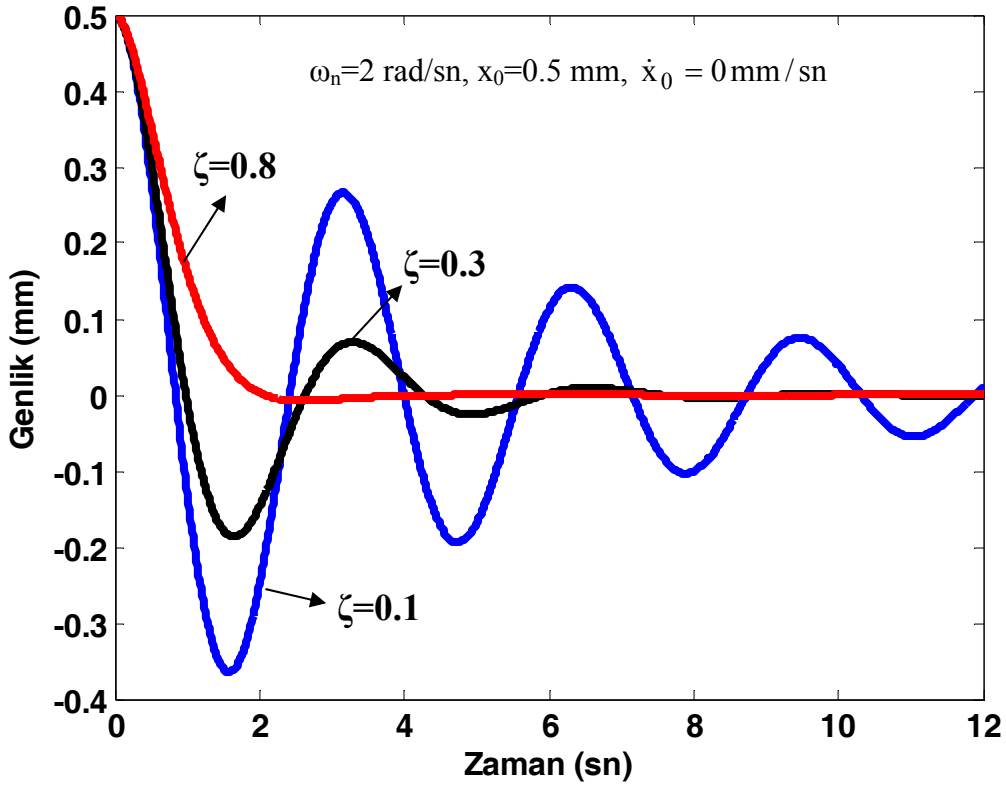


$$\sin \phi = \frac{x_0 \omega_d}{\sqrt{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}$$

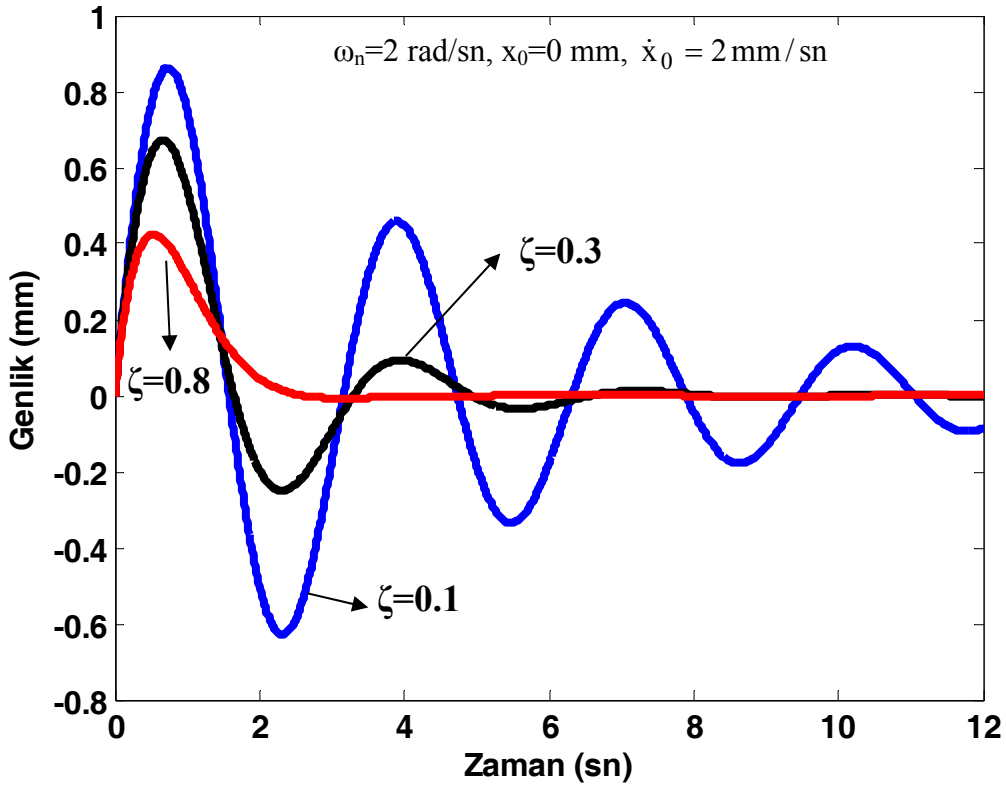
$$\text{Buradan } A = \frac{x_0}{\frac{x_0 \omega_d}{\sqrt{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}} = \frac{\sqrt{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}{\omega_d} \text{ olarak elde edilir.}$$

Buradan kritik altı sönümlü tek serbestlik dereceli bir sistem için cevap

$$x(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}\right)\right) \text{ dir.}$$



Tek serbestlik dereceli sistem için kritik altı sönümlü cevap.



Tek serbestlik dereceli sistem için kritik altı sönümlü cevap.

2. Kritik Üstü Sönümlü Cevap (Overdamped Response) :

Sönüm oranının 1'den büyük olduğu durum için reel ve farklı iki kök mevcuttur.

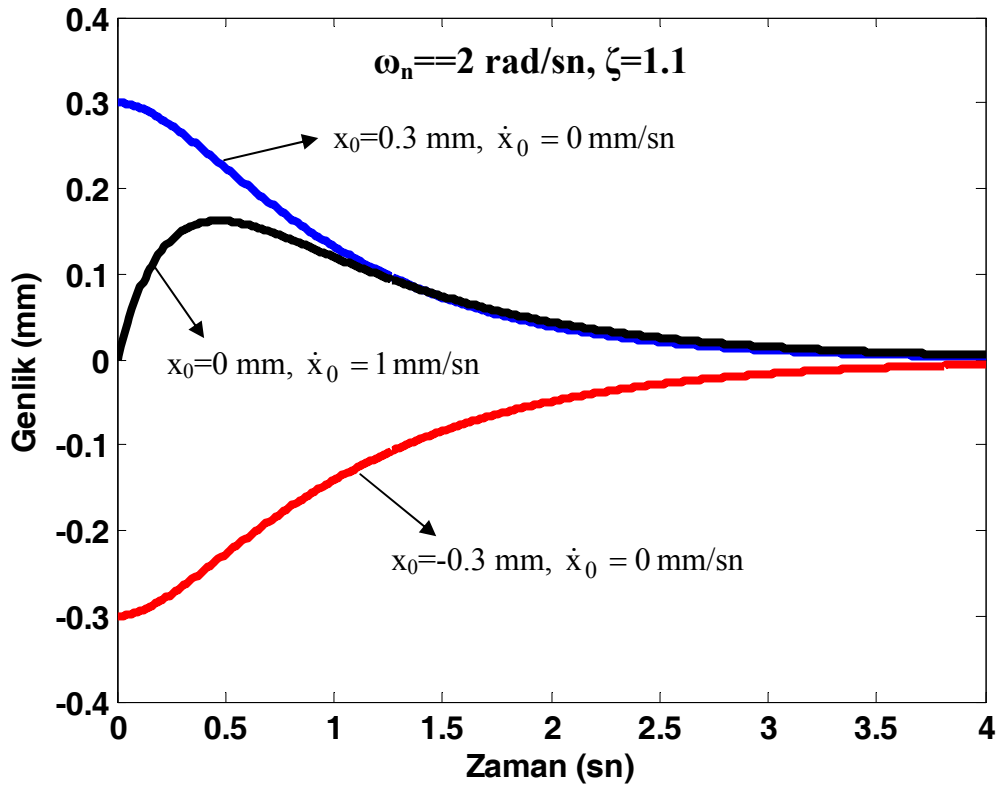
$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{ve} \quad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Bu durumda cevap aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(a_1 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} + a_2 e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right)$$

Burada a_1 ve a_2 katsayıları başlangıç şartlarından aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$a_1 = \frac{-\dot{x}_0 + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{\dot{x}_0 + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$



Tek serbestlik dereceli sistemin kritik üstü sönümlü cevabı

Kritik üstü sönümlü sistemler denge konumu etrafında salınım göstermeksizin başlangıç konumlarına dönerler.

3. Kritik Sönümlü Cevap (Critically Damped Response) :

Sönüm oranının 1'e eşit olması durumu salınımlı cevap ile salınımsız cevap arasında bir sınır teşkil eder. Bu durum için kökler katlı kök halindedir.

$$s_1 = s_2 = \omega_n$$

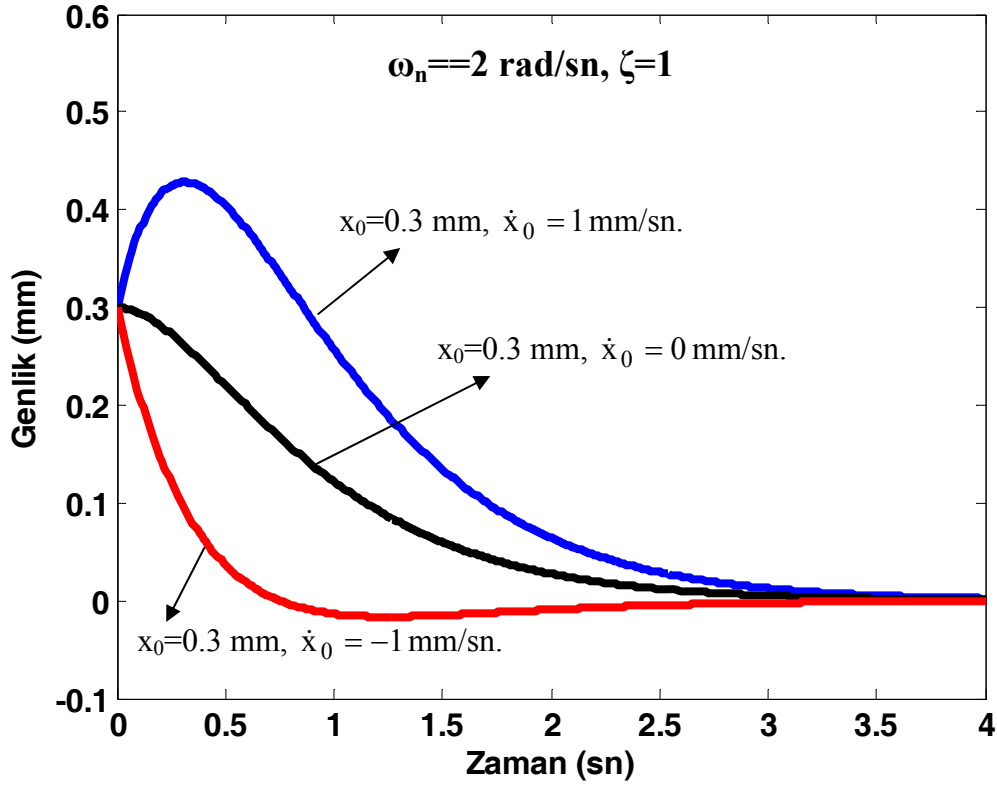
Bu durumda çözüm formu aşağıdaki gibidir.

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\omega_n t}$$

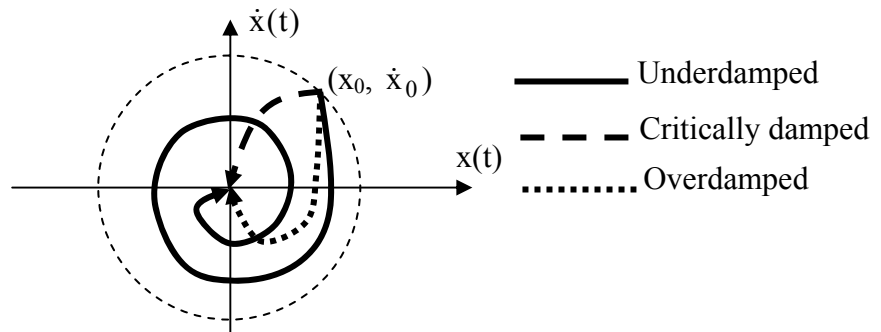
$t=0$ 'daki başlangıç şartları yerine konur ise a_1 ve a_2 katsayıları elde edilebilir.

$a_1 = x_0$ ve $a_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$. Bu durumda başlangıç şartları altındaki serbest cevap

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t}$$



Tek serbestlik dereceli sistemin kritik sönümlü cevabı



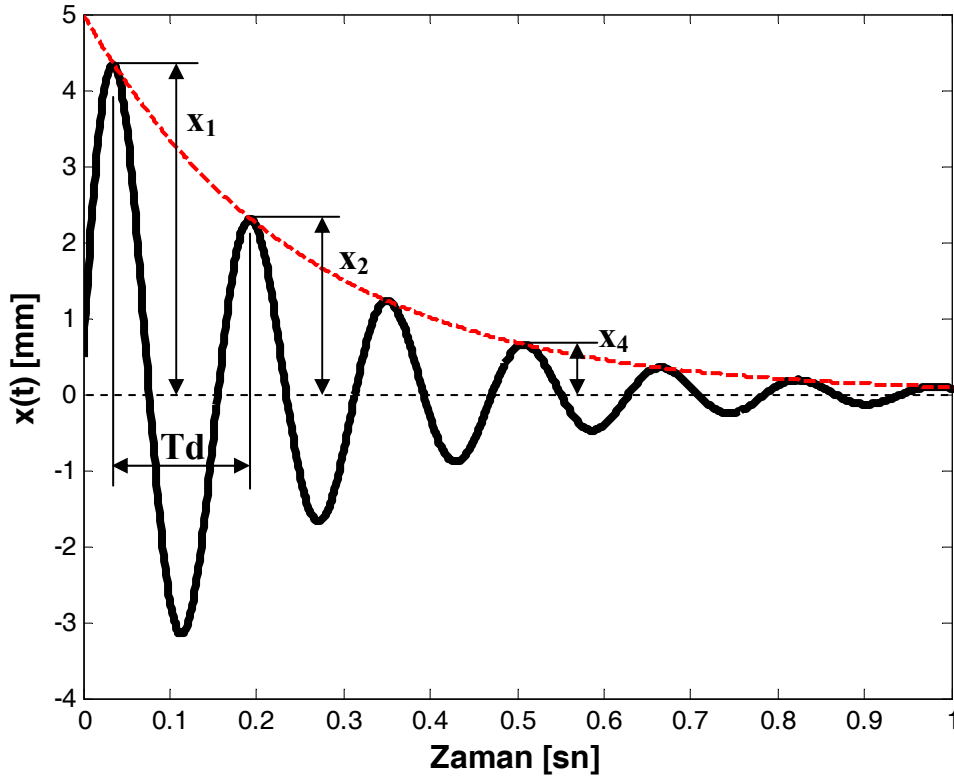
LOGARİTMİK DEKREMAN (LOGARITHMIC DECREMENT) :

Mekanik bir sistemin sahip olduğu sönüm oranını belirlemenin uygun yöntemlerinden biri, sistemin serbest titreşimlerindeki salınım genliklerinin azalma oranını ölçmektir.

Kritik altı sönümlü bir sistem için titreşim cevabı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

Burada A ve ϕ başlangıç şartlarından elde edilebilen değerlerdir. Bu formdaki bir titreşim cevabı eğrisi aşağıda verilmiştir.



Salınımlı titreşim cevabı üzerinde ard arda gelen iki tepe noktasının birbirine oranının logaritmasını (doğal logaritma) *Logatirmik Dekreman (Logarithmic Decrement)* olarak tanımlar ve aşağıdaki şekilde ifade edersek

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln \left(\frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)}{e^{-\zeta\omega_n (t+T_d)} \sin(\omega_d (t + T_d) + \phi)} \right)$$

Sinüs fonksiyonu için t anındaki değer ile $t+T_d$ nındaki değerler eşit olacağı için ifade aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\delta = \ln \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{e^{-\zeta\omega_n t} e^{-\zeta\omega_n T_d}} = \ln e^{\zeta\omega_n T_d} = \zeta\omega_n T_d$$

Sönümlü doğal periyot $T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ olduğu için

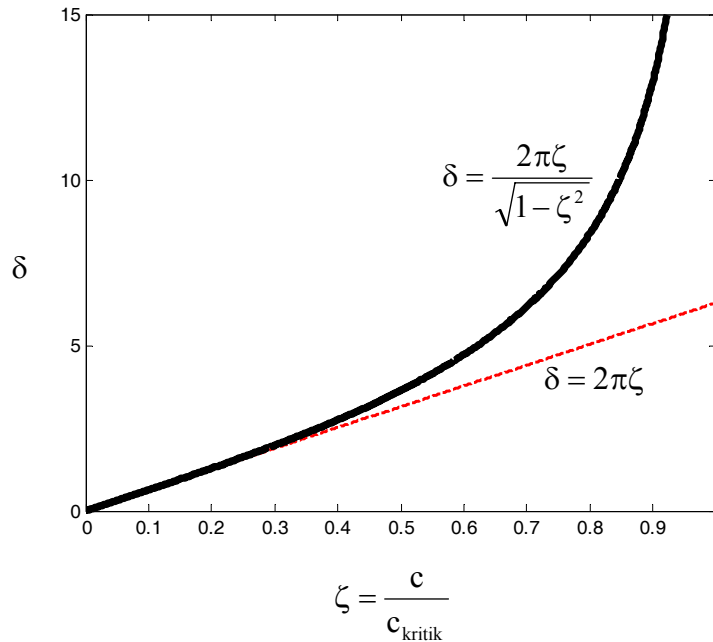
$\delta = \frac{\zeta \omega_n 2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ olarak elde edilir. Sönüm oranı ζ 'nin küçük değerleri için bu ifade

$\delta = 2\pi\zeta$ ve sisteme ait sönüm oranı $\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$ olarak yaklaşık şekilde elde edilebilir.

Tam ifade kullanıldığında ise sisteme ait sönüm oranı, deneysel olarak elde edilmiş logaritmik dekremen değeri kullanılarak,

$$\delta^2(1-\zeta^2) = 4\pi^2\zeta^2 \rightarrow \delta^2 = (\delta^2 + 4\pi^2)\zeta^2 \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}} \rightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

olarak elde edilebilir.



Şekil. Logaritmik dekremen için yaklaşık ve tam ifadenin sönüm oranı ile değişimi.

Logaritmik dekremen ifadesi aralarında n adet tam salınım bulunan tepe noktaları kullanılarak da elde edilebilir.

Birbirini takip eden tepe noktaları oranlarının aynı olduğundan hareketle

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ buradan 1. salınım genliği ile $n+1$. genlik (n . salınım sonundaki) arasındaki oran

$$\frac{x_1}{x_n} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\dots\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = (e^\delta)^n = e^{n\delta} \rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = \ln(e^{n\delta}) \rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right) = n\delta$$

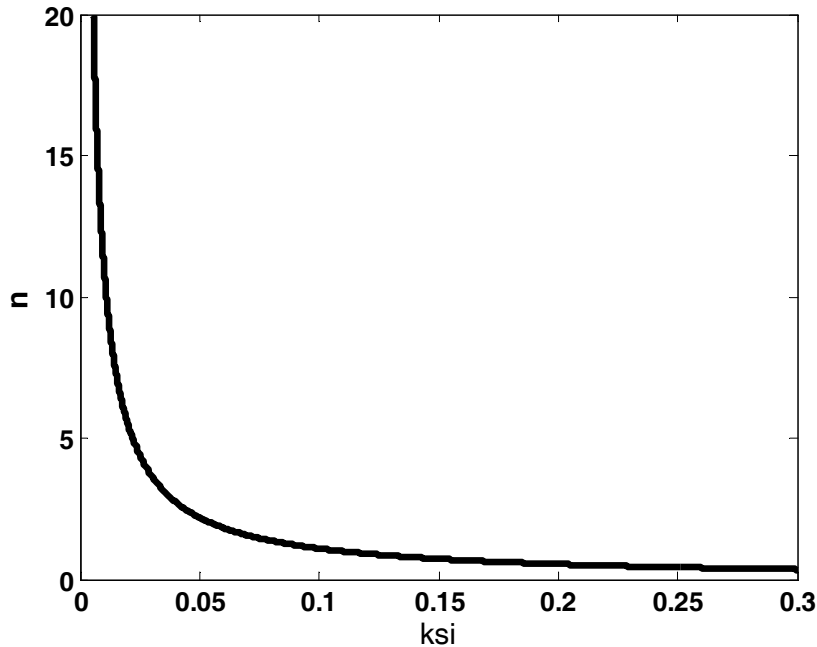
$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)$ olarak elde edilebilir. Burada n tam salınım sayısı, x_1 başlangıç salınımı genliği, x_{n+1} ise n. salınım sonundaki genliktir. Dikkate alınan başlangıç salınımı genliği x_0 ile gösterilir ise denklem

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) \text{ olarak da ifade edilebilir.}$$

Örnek: Bir titreşim sisteminde titreşim genliğinin %50 azalması için gerekli salınım sayısını sistemin sönüm oranına göre ifade ediniz.

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{n} \ln 2 \rightarrow n = \frac{0.693\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}$$

Bu denkleme ait grafik aşağıda verilmiştir. Bu grafik, titreşim genliğinin %50 azalması için gerekli tam salınım sayısının sönüm oranı ile değişimini göstermektedir.

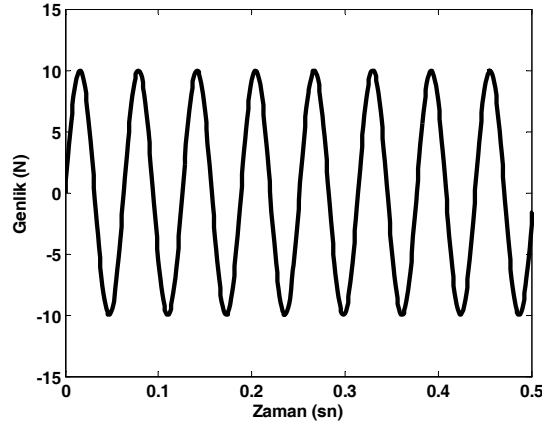


TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ:

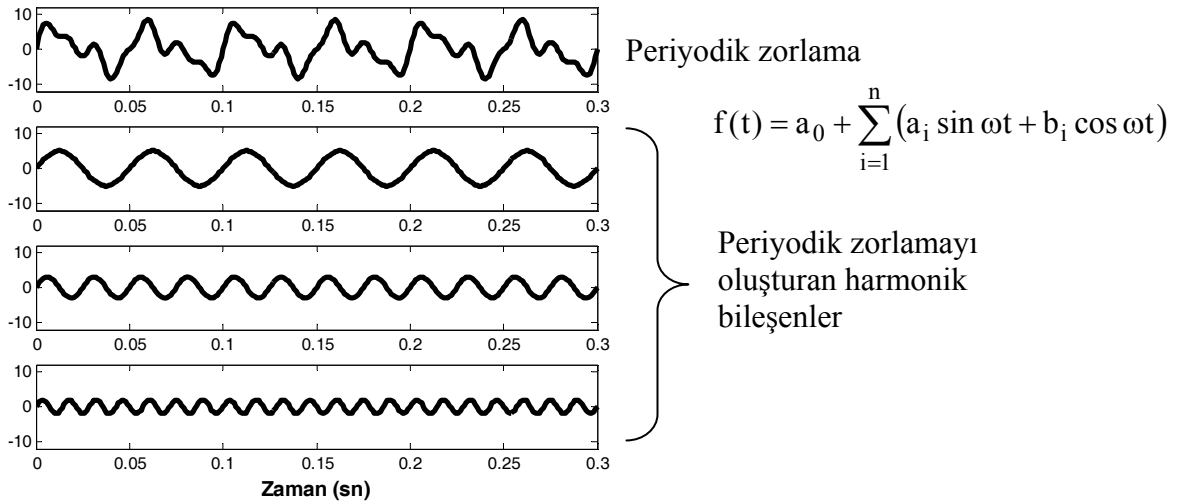
Mühendislik sistemlerine etki eden kuvvetler genellikle harmonik formdadır. Şekilde harmonik bir kuvvet görülmektedir.

$$f(t) = F_0 \sin \omega t$$

Burada F_0 zorlama genliği, ω ise zorlama frekansıdır.



Bununla birlikte mühendislik sistemleri üzerinde sıklıkla etkili olan diğer bir zorlama tipi de periyodik zorlamalardır. Fourier serileri ve dönüşümleri kullanılarak, periyodik fonksiyonları bir dizi harmonik fonksiyonun toplamı şeklinde ifade etmek mümkündür. Zorlamanın bir dizi harmonik fonksiyonun toplamı olduğu bilgisi kullanılarak, doğrusal (linear) sistemlerin periyodik zorlamalara verdiği cevabın, sistemin periyodik zorlamayı oluşturan her bir harmonik zorlamaya verdiği cevapların toplamı olduğu söylenebilir.



Şekil. Periyodik zorlama ve harmonik bileşenleri.

Fourier serileri ve tek serbestlik dereceli sistemlerin periyodik zorlamalara cevabına bölüm sonunda değinilecektir.

Sönümsüz Zorlanmış Titreşimler (Harmonik Zorlama):

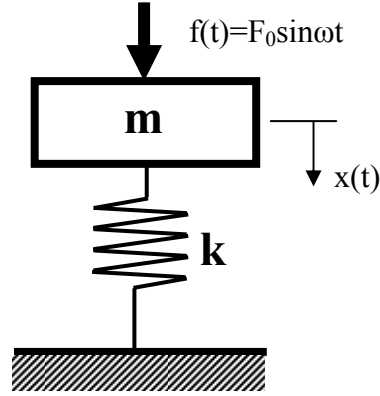
Yandaki tek serbestlik dereceli sistem üzerine ω zorlama frekansında harmonik bir kuvvet etki etmektedir. Newton'un 2. yasası kullanılarak hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$-kx + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

buradan

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$



Yukarıdaki 2. mertebeden diferansiyel denklem için genel çözüm homojen ve özel çözümlerin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$$x(t) = x_h(t) + x_o(t)$$

Homojen çözüm ilk şartlar etkisi ile elde edilen çözümdür ve başlangıç şartlarına bağlı olarak

$x_h(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$ olarak ifade edilmişti. Özel çözümü elde etmek için zorlama tipinde bir çözüm kabul edilebilir.

$x_o(t) = X \sin \omega t$ olduğu kabul edilerek, kabul edilen çözümün türevleri diferansiyel denklemde yerine konulur ise

$$\dot{x}(t) = \omega X \cos \omega t, \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin \omega t$$

$$-\omega^2 X \sin \omega t + \omega_n^2 X \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \left[-\omega^2 + \omega_n^2 \right] X = \frac{F_0}{m} \quad \text{denklemin her iki tarafı}$$

$\frac{1}{\omega_n^2}$ ile çarpılır ise

$$(1 - r^2) X = \frac{F_0}{m} \frac{m}{k} \quad \rightarrow \quad X = \frac{F_0/k}{(1 - r^2)} \quad \text{burada } r = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dir ve frekans oranı olarak adlandırılır.}$$

Başlangıç şartları sıfırdan farklı bir sistem harmonik zorlama altındaki genel çözüm;

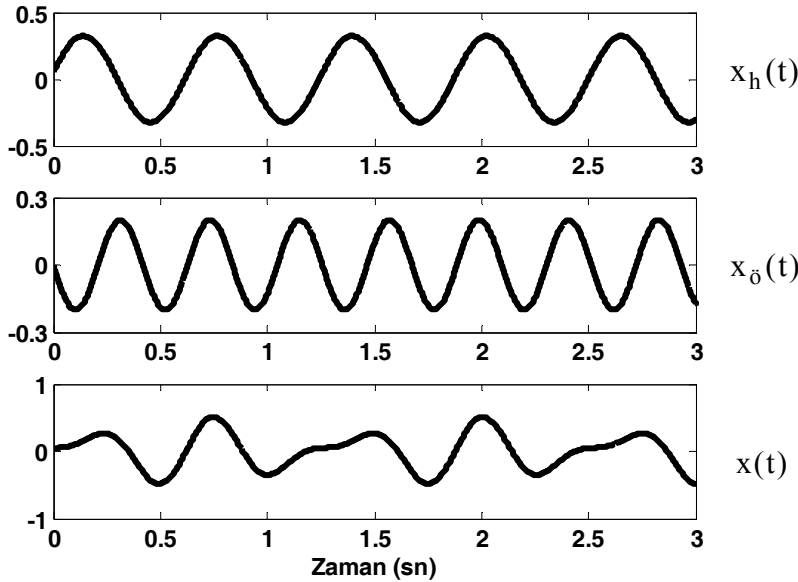
$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t \text{ 'dir.}$$

Genel çözümdeki A_1 ve A_2 katsayıları başlangıç şartlarından elde edilebilir.

$$x_0 = A_1 \cos \omega_n 0 + A_2 \sin \omega_n 0 + \frac{F_0/k}{1 - r^2} \sin \omega 0 \rightarrow A_1 = x_0$$

$$\dot{x}_0 = -\omega_n A_1 \sin \omega_n 0 + \omega_n A_2 \cos 0 + \omega \frac{F_0/k}{1 - r^2} \cos \omega 0 \rightarrow A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} - r \frac{F_0/k}{1 - r^2}$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} - r \frac{F_0/k}{1 - r^2} \right] \sin \omega_n t + \frac{F_0/k}{1 - r^2} \sin \omega t$$

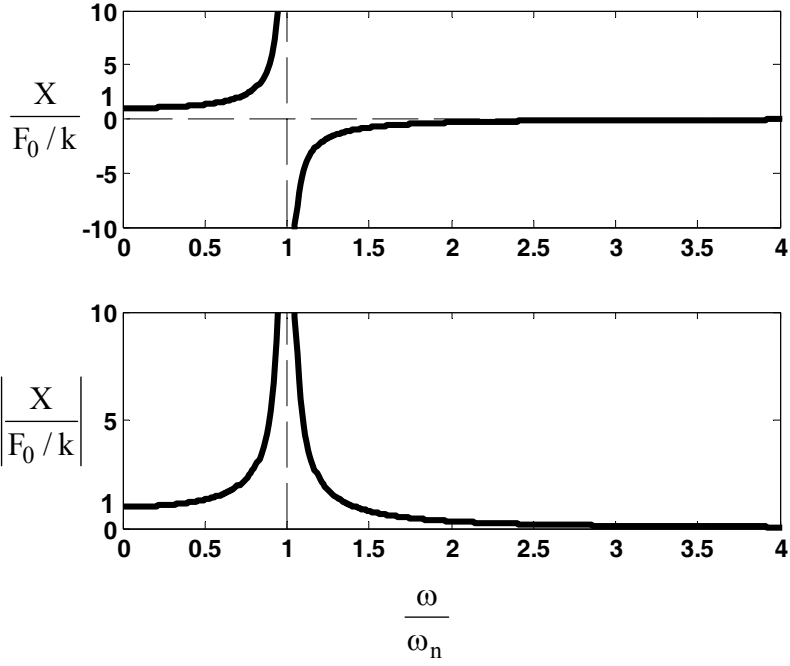


$$\begin{aligned} m &= 20 \text{ kg} \\ k &= 2000 \text{ N/m} \\ \omega &= 15 \text{ rad/sn} \\ x_0 &= 0.05 \text{ m} \\ v_0 &= 0.2 \text{ m/sn} \end{aligned}$$

Şekil. Tek serbestlik dereceli sistem için genel çözüm.

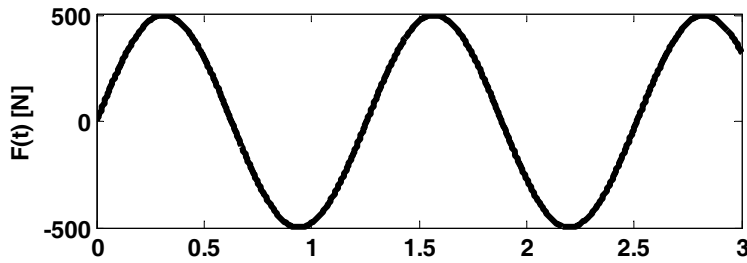
Başlangıç şartları sıfır ise çözüm $x_0(t)$ formunda harmonik bir cevap olacaktır. Frekans oranına bağlı olarak yer değiştirme genlikleri çizilir ise

$$\frac{X_0}{F_0/k} = \frac{1}{1 - r^2}$$



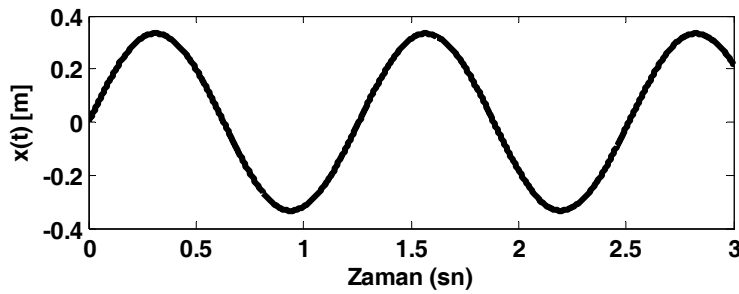
Frekans oranına bağılı olarak aşağıdaki durumlar geçerlidir.

$0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$ durumunda yer değıştirme zorlama ile aynı yöndedir. (in-phase)



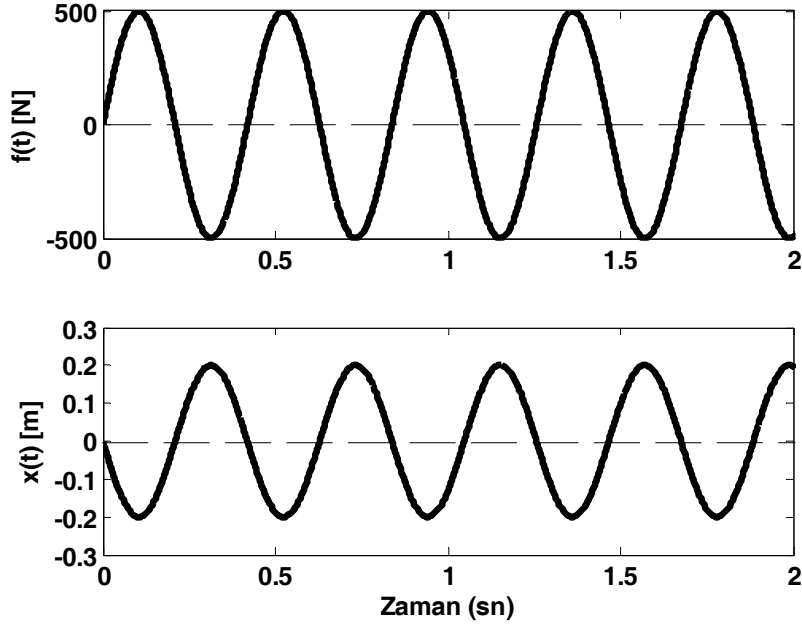
$\omega=5$ rad/sn
 $\omega_n=10$ rad/sn

In-Phase cevap



$\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ cevap sonsuza gider.

$\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ durumunda yer değıştirme zorlama ile zıt yöndedir. (anti-phase)

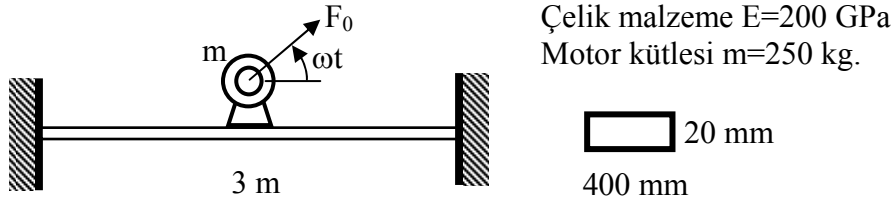


Anti-Phase cevap

Örnek:

Şekilde verilen kiriş üzerinde bulunan bir elektrik motorundan dolayı kirişe etki eden kuvvet

$f(t) = 300 \sin 40t$ (N) şeklindedir.



Bu kuvvet etkisi altında motorun bulunduğu noktadaki yer değiştirme genliklerini hesaplayalım. Motor kirişin ortasındadır. Kiriş kütlesi ihmal edilebilir değerdedir.

Kiriş orta noktasındaki direngenlik

$$k = \frac{192EI}{L^3}, \text{ Kiriş alan atalet momenti } I = \frac{0.4 * 0.02^3}{12} = 2.666 \times 10^{-7} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$k = \frac{192 * 200 \times 10^9 * 2.666 \times 10^{-7}}{3^3} = 379259 \text{ (N/m)}.$$

Motor kiriş sisteminin doğal frekansı (kiriş kütlesi ihmal ediliyor)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{379259}{250}} = 38.95 \text{ (rad/sn)}$$

Zorlama frekansı 40 rad/sn'dir. Bu durumda zorlama ile yer değiştirme anti-phase durumundadır.

Yer değiştirme genliği

$$X = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{300/379259}{1 - \left(\frac{40}{38.95}\right)^2} = -0.01446 \text{ (m)} = -14.46 \text{ (mm)}$$

Sönümlü Zorlanmış Titreşimler (Harmonik Zorlama):

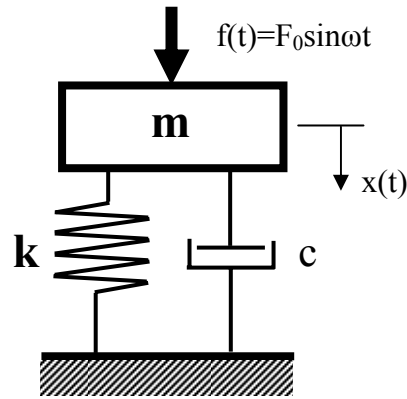
Şekilde verilen tek serbestlik dereceli harmonik zorlama etkisindeki sönümlü bir sistem için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

Sönüm oranı için $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ ifadesi kullanılarak

hareket denklemi şu şekilde de yazılabilir.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$



Diferansiyel denklemin çözümü homojen çözüm ile özel çözümün toplamı şeklinde ifade edilebilir. Homojen çözüm başlangıç şartlarına bağlıdır, özel çözüm ise dış zorlam ile oluşur. Başlangıç şartlarına bağlı çözüm, sönümlü durum için zaman ilerledikçe kaybolacaktır ve sistem cevabı sadece zorlama ile elde edilen çözüm olacaktır. Bu nedenle özel çözüme (zorlamaya bağlı çözüm) düzgün rejim cevabı da denir. Özel çözümün formu zorlam formunda kabule dilerek.

$x_{\delta}(t) = x(t) = X \sin(\omega t - \varphi)$ kabul edilerek, çözümün türevleri diferansiyel denklemde yerine konur ise.

$$\dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t - \varphi), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$-\omega^2 X \sin(\omega t - \varphi) + 2\zeta\omega_n(\omega X \cos(\omega t - \varphi)) + \omega_n^2 X \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

Trigonometrik açılımlardan yararlanılarak

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi - \sin \varphi \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$$

$$-\omega^2 X \sin \omega t \cos \varphi + \omega^2 X \sin \varphi \cos \omega t + 2\zeta \omega_n \omega X \cos \omega t \cos \varphi + 2\zeta \omega_n \omega X \sin \omega t \sin \varphi + \omega_n^2 X \sin \omega t \cos \varphi$$

$$-\omega_n^2 X \sin \varphi \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$\left[-\omega^2 \cos \varphi + 2\zeta \omega_n \omega \sin \varphi + \omega_n^2 \cos \varphi \right] X \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$\left[\omega^2 \sin \varphi + 2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi - \omega_n^2 \sin \varphi \right] X \cos \omega t = 0$$

$$\left[2\zeta \omega_n \omega \sin \varphi + (\omega_n^2 - \omega^2) \cos \varphi \right] X = \frac{F_0}{m}, \left[2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi + (\omega^2 - \omega_n^2) \sin \varphi \right] X = 0$$

$$\left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \sin \varphi + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \cos \varphi \right] X = \frac{F_0}{k}$$

$$\left[2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi + (\omega^2 - \omega_n^2) \sin \varphi \right] X = 0 \rightarrow \left[2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi - (\omega_n^2 - \omega^2) \sin \varphi \right] X = 0$$

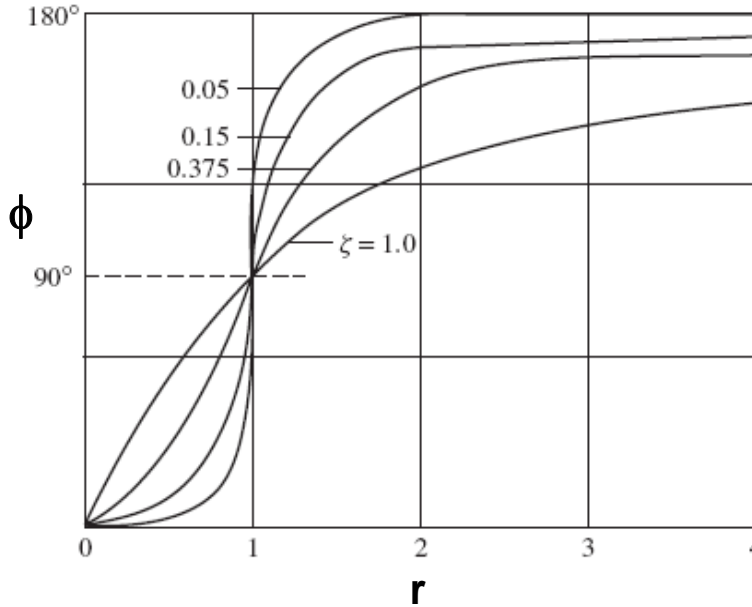
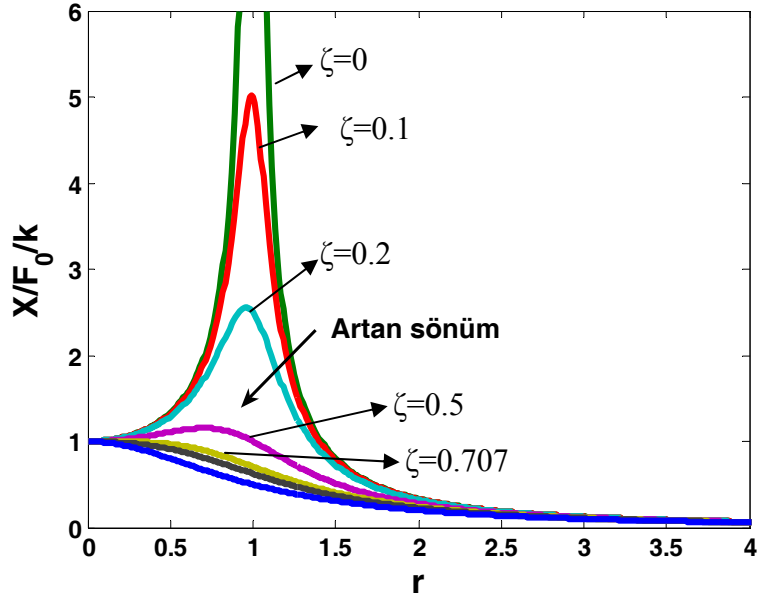
$$\frac{1}{\omega_n^2} \left[2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi - (\omega_n^2 - \omega^2) \sin \varphi \right] X = 0 \frac{1}{\omega_n^2} \rightarrow 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \cos \varphi = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2} \\ \hline 1-r^2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2\zeta r \\ \hline \end{array}$$

$$\sin \varphi = \frac{2\zeta r}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1-r^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}$$

$$\left[2\zeta r \frac{2\zeta r}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} + (1-r^2) \frac{1-r^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} \right] X = \frac{F_0}{k}$$

$$\frac{X}{F_0/k} = \frac{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r}{1-r^2} \right)$$



Rezonans durumu incelenir ise;

Rezonans durumunda genlik en büyük değere sahiptir. En büyük genliğin elde edildiği frekans değerine REZONANS FREKANSI adı verilir. Bu frekans değerinde cevap genliği eğrisinin türevi sıfıra eşittir.

$$\frac{d\left(\frac{X}{F_0/k}\right)}{dr} = \frac{0 \cdot \sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2} - 0.5 \frac{8\zeta^2 r - 4r + 4r^3}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}}{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2} = 0$$

$r^2 + 2\zeta^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \rightarrow$ Rezonans Frekansı $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ $\zeta = 0.707$ ve daha sonrası için rezonans tepesi gözlenmez.

Rezonansdaki genlik değerini hesaplamak için bulunan r değeri genlik oranı ifadesinde yerine konulur ise

$$\left(\frac{X}{F_0/k} \right)_R = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{elde edilir. Küçük sönüm oranları için Rezonans Genliği}$$

$$\left(\frac{X}{F_0/k} \right)_R = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Tek serbestlik dereceli bir sistemin frekansa bağlı cevap genliklerini hesaplamak için aşağıdaki program notepad programında yazılarak txt formatında kaydedilir. ANSYS'de çalıştırılır. Farklı model parametreleri için (kütle, direnç, sönüm) cevap genlikleri incelenebilir.

dof1_harm.txt

```

/prep7
et,1,mass21
et,2,combin14
r,1,0,40
r,2,200000,200

n,1,0,0,0
n,2,0,1,0

type,1
real,1
e,2
type,2
real,2
e,1,2
eplot

/solu
antype,3

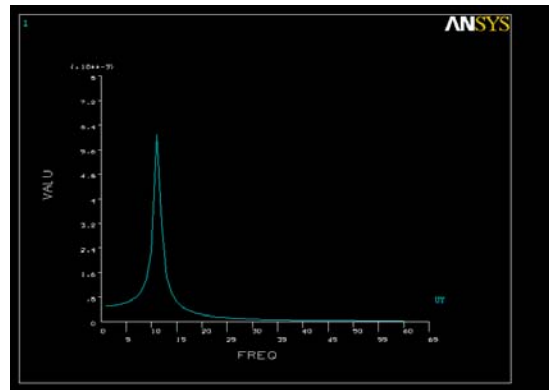
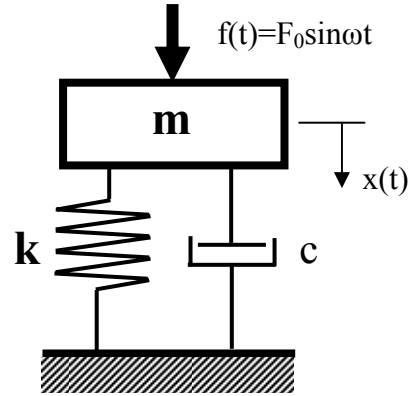
d,all,ux,0
d,all,uz,0
d,1,uy,0

f,2,fy,-100
harfrq,0,60
nsubst,60
kbc,1

solve
/post26

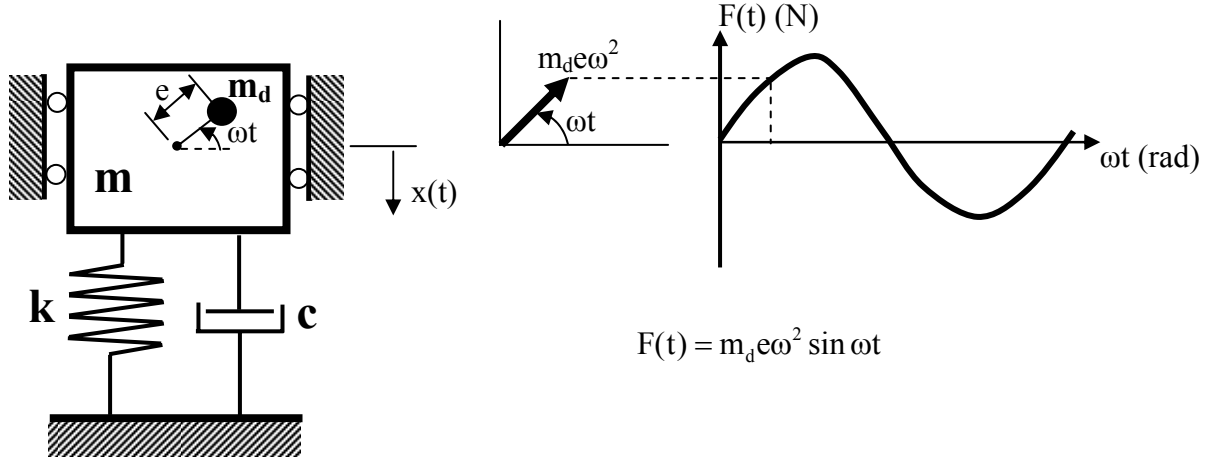
nsol,2,2,uy
plvar,2

```



Kütle Dengesizliğinden Kaynaklanan Kuvvetler İle Oluşan Titreşimler:

Kütle dengesizliği hemen hemen tüm dönel makinalarda karşılaşılan temel bir problemdir. Şekilde kütle dengesizliği ile uyarılan tek serbestlik dereceli bir sistem görülmektedir.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_d e \omega^2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

$$x(t) = X \sin(\omega t - \varphi), \quad \dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t - \varphi), \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{m_d e \omega^2}{m} \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{m_d e \omega^2}{m} \sin \omega t$$

$$-\omega^2 X \sin(\omega t - \varphi) + 2\zeta \omega_n \omega X \cos(\omega t - \varphi) + \omega_n^2 X \sin(\omega t - \varphi) = \frac{m_d e \omega^2}{m} \sin \omega t$$

Trigonometrik eşitliklerden kullanılarak

$$-\omega^2 X \sin \omega t \cos \varphi + \omega^2 X \sin \varphi \cos \omega t + 2\zeta \omega_n \omega X \cos \omega t \cos \varphi + 2\zeta \omega_n \omega X \sin \omega t \sin \varphi + \omega_n^2 X \sin \omega t \cos \varphi$$

$$-\omega_n^2 X \sin \varphi \cos \omega t = \frac{m_d e}{m} \omega^2 \sin \omega t$$

$\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ terimlerinin katsayıları oluşturularak

$$\left[-\omega^2 \cos \varphi + 2\zeta \omega_n \omega \sin \varphi + \omega_n^2 \cos \varphi \right] X \sin \omega t = \frac{m_d e \omega^2}{m} \sin \omega t$$

$$\left[\omega^2 \sin \varphi + 2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi - \omega_n^2 \sin \varphi \right] X \cos \omega t = 0$$

$$\left[2\zeta \omega_n \omega \sin \varphi + (\omega_n^2 - \omega^2) \cos \varphi \right] X = \frac{m_d e \omega^2}{m} \rightarrow \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \sin \varphi + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \cos \varphi \right] X = \frac{m_d e}{m} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

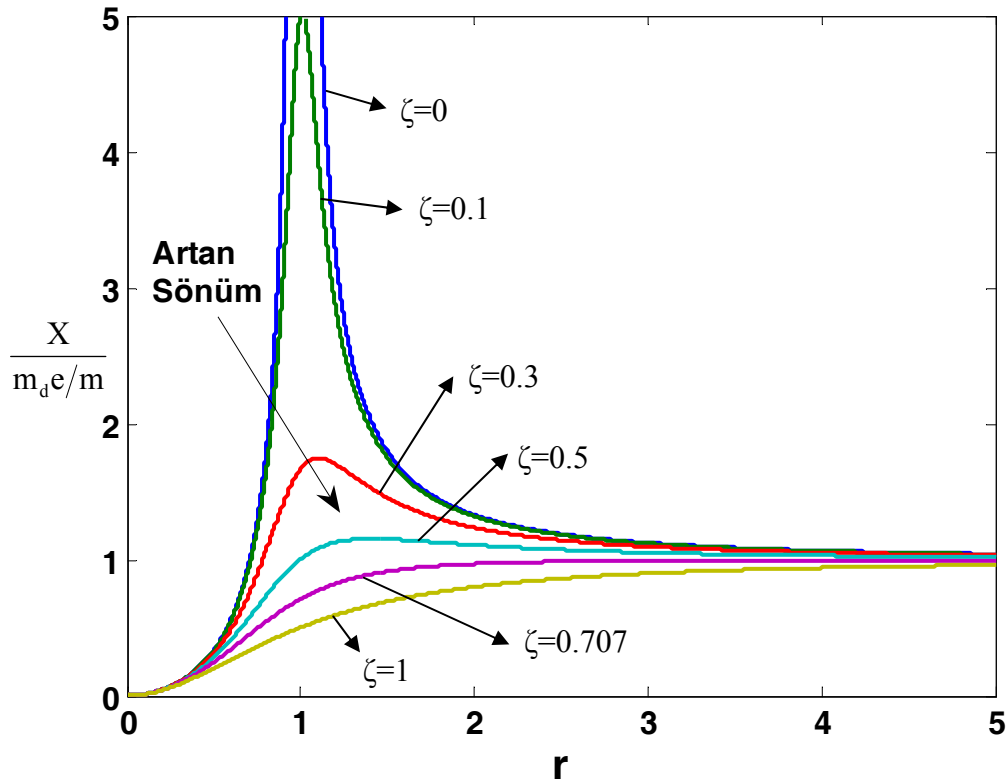
$$\left[2\zeta \omega_n \omega \cos \varphi - (\omega_n^2 - \omega^2) \sin \varphi \right] X = 0 \rightarrow 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \cos \varphi = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \sin \varphi \rightarrow \tan \varphi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

$\sin \varphi$ ve $\cos \varphi$ için değerler yerine konur ise

$$\sin \varphi = \frac{2\zeta r}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1-r^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}$$

$$\left[\frac{(2\zeta r)^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} + \frac{(1-r^2)^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} \right] X = \frac{m_d e}{m} r^2$$

$$\frac{X}{m_d e / m} = \frac{r^2 \sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2} = \frac{r^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}$$



Rezonans durumundaki r oranını bulmak için genlik ifadesinin r'ye göre türevi alınıp sonuç sifira eşitlenir ise,

$$\frac{d\left(\frac{X}{m_d e / m}\right)}{dr} = 2 \frac{r}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} - \frac{1}{2} \frac{r^2 (8\zeta^2 r - 4r + 4r^3)}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} = 0$$

İşlemler yapılır ise REZONANS durumu için r oranı

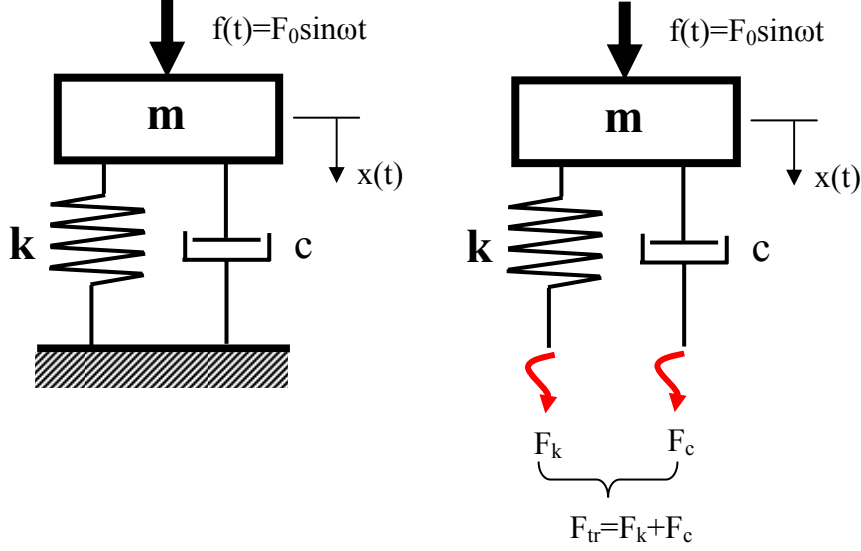
$$(r)_{\text{rez}} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \rightarrow \text{Buradan } \omega_R = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}, \text{ Bu frekans genlik ifadesinde yerine}$$

konulur ise REZONANS genliği için

$$\left(\frac{X}{m_d e / m}\right)_{\text{rez}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \text{ dir. Küçük sönüm oranları için } \left(\frac{X}{m_d e / m}\right)_{\text{rez}} = \frac{1}{2\zeta} \text{ dir.}$$

Zemine İletilen Kuvvet:

Harmonik kuvvet etkisi altındaki bir mekanik sistem, hareket sırasında yay ve amortisörde oluşan reaksiyon kuvvetlerini bağlantı noktalarından zemine iletir. Zorlama kuvveti genliği ve zemine iletilen kuvvet arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilebilir.



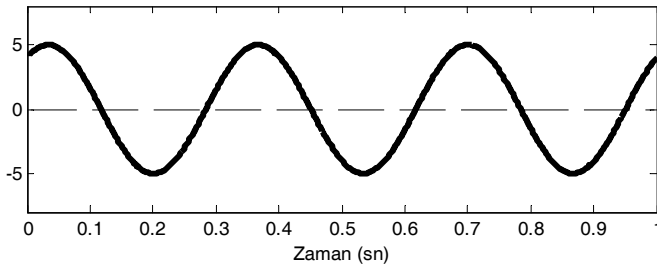
Harmonik zorlama etkisindeki düzenli rejim titreşimleri dikkate alınarak harmonik yer değiştirme ve buna ait hız ifadesi ile;

$$x(t) = X \sin(\omega t - \varphi), \quad \dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t - \varphi)$$

$$F_{tr} = kX \sin(\omega t - \varphi) + c\omega X \cos(\omega t - \varphi)$$

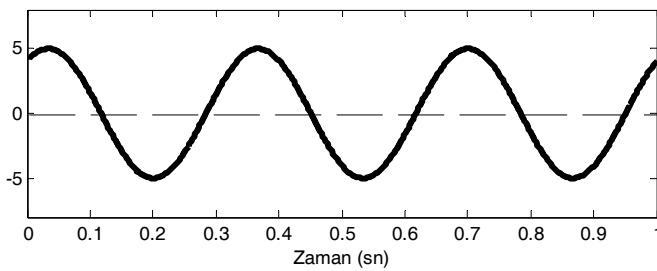
Aşağıdaki trigonometrik ilişki kullanılarak

$$z(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \beta), \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$



$$\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 4 \\ \omega &= 18.85 \end{aligned}$$

$$z(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$



$$z(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

Dolayısı ile zemine iletilen kuvvet aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F_{tr}(t) = F_{TR} \sin(\omega t + \phi')$$

Zemine iletilen kuvvet genliği üzerinde durulduğu için F_{TR} genliği

$$F_{TR} = \sqrt{(kX)^2 + (cX\omega)^2} = \sqrt{(kX)^2 \left[1 + \frac{c^2\omega^2 X^2}{k^2 X^2} \right]}$$

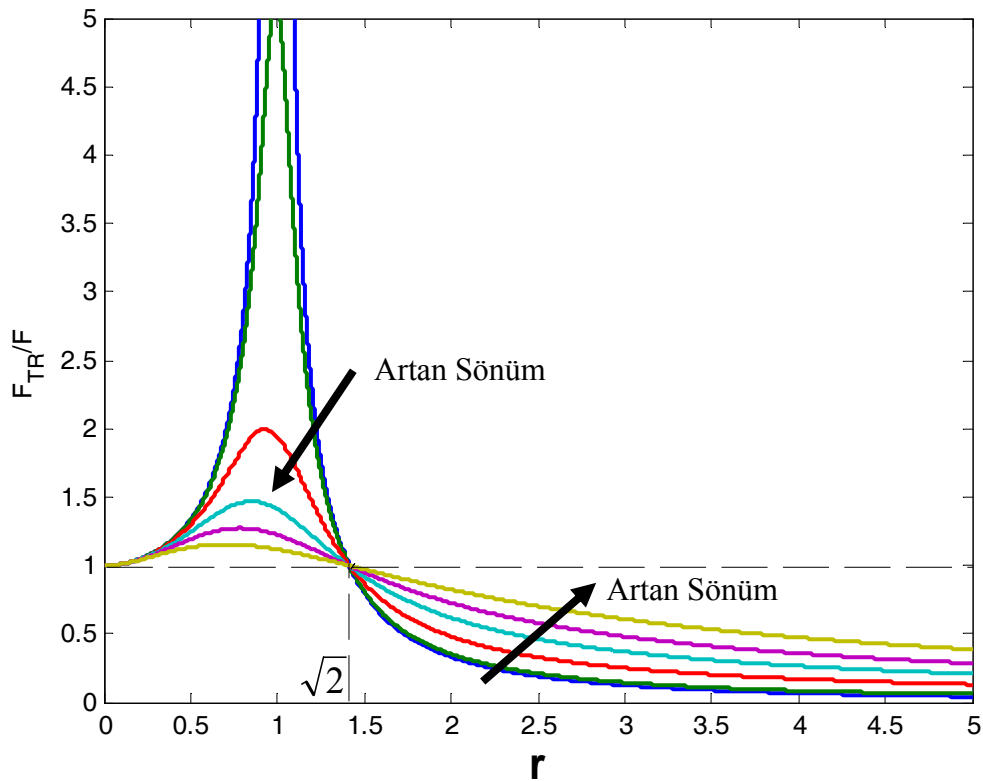
$$F_{TR} = kX \sqrt{1 + \frac{c^2\omega^2}{m^2(\omega_n^2)^2}} \quad (k = m\omega_n^2)$$

$$F_{TR} = kX \sqrt{1 + \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{r^2}{\omega_n^2}} = kX \sqrt{1 + (2\zeta\omega_n)^2 \frac{r^2}{\omega_n^2}}$$

$$F_{TR} = kX \sqrt{1 + (2\zeta r)^2}$$

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1 - r^2)^2}}$$

$$\frac{F_{TR}}{F} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1 - r^2)^2}} = T \quad (\text{Kuvvet iletim Oranı, Transmissibility})$$



Kuvvet iletim oranı grafiği ile ilgili özellikler:

- $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ ise ya $\omega=0$ ya da $\omega_n=\infty$ dur. $\omega=0$ olması uygulanan kuvvetin sabit genlikli olduğunu gösterir. Hız sıfır olduğunda sönümleyici kuvveti sıfır olur ve kuvvet yay üzerinden zemine iletilir. $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \infty$ durumu ya yay direngenliğinin sonsuz ya da kütle değerinin 0 olması halidir. Bu durumda bağlantı rijit olduğundan kuvvet direkt olarak iletilir. uygulanan kuvvet direkt olarak yapıya iletilir.
- $\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{2}$ özel bir frekans oranı olup bu durumda sönüm oranı ne olursa olsun iletim oranı 1 olmaktadır.
- $\frac{\omega}{\omega_n} < \sqrt{2}$ ise $T > 1$ 'dir. Bu frekans bölgesinde ζ artar ise T kuvvet iletim oranı azalır. Bu bölgede ω 'nın değeri küçük olduğu için harmonik hareket sırasında ortaya çıkan hızlar düşüktür. Bu nedenle sönümleyicinin ilettiği kuvvet yayın ilettiği kuvvete göre daha düşüktür.
- $\frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$ ise $T < 1$ olur. Bu frekans bölgesinde iletim oranının azaltılması için ζ 'nin mümkün olduğunca azaltılması gereklidir. Bu bölgede ω büyük olduğundan hızlar da büyüktür. Dolayısı ile iletim ağırlıklı olarak sönümleyici üzerinden olur.
- $\frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \infty$ T sifıra yaklaşır. Bu durum ya $\omega=\infty$, ya da $\omega_n=0$ ile sağlanabilir. Geçek mühendislik sistemleri için zorlama frekansı belli değerlere kadar büyütülebilir. $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 'nin sifıra yaklaşması için ya k değeri sifıra yaklaşmalı ya da kütle değeri sonsuza gitmelidir. K değerinin sifıra yaklaşması kütle ile zemin arasındaki bağın zayıflaması şeklinde yorumlanabilir, m değerinin sonsuza gitmesi durumunda da kütlelerin eylemsizliği sonsuza gittiğinden kuvvet zemine iletilemeyecektir.

Kütle Dengesizliğinden Kaynaklanan Kuvvetlerin Zemine İletimi:

Harmonik bir kuvvet zorlaması durumu için zemine iletilen kuvvet ifadesi

$F_{TR} = kX\sqrt{1+(2\zeta r)^2}$ formülü ile ifade edilmiştir.

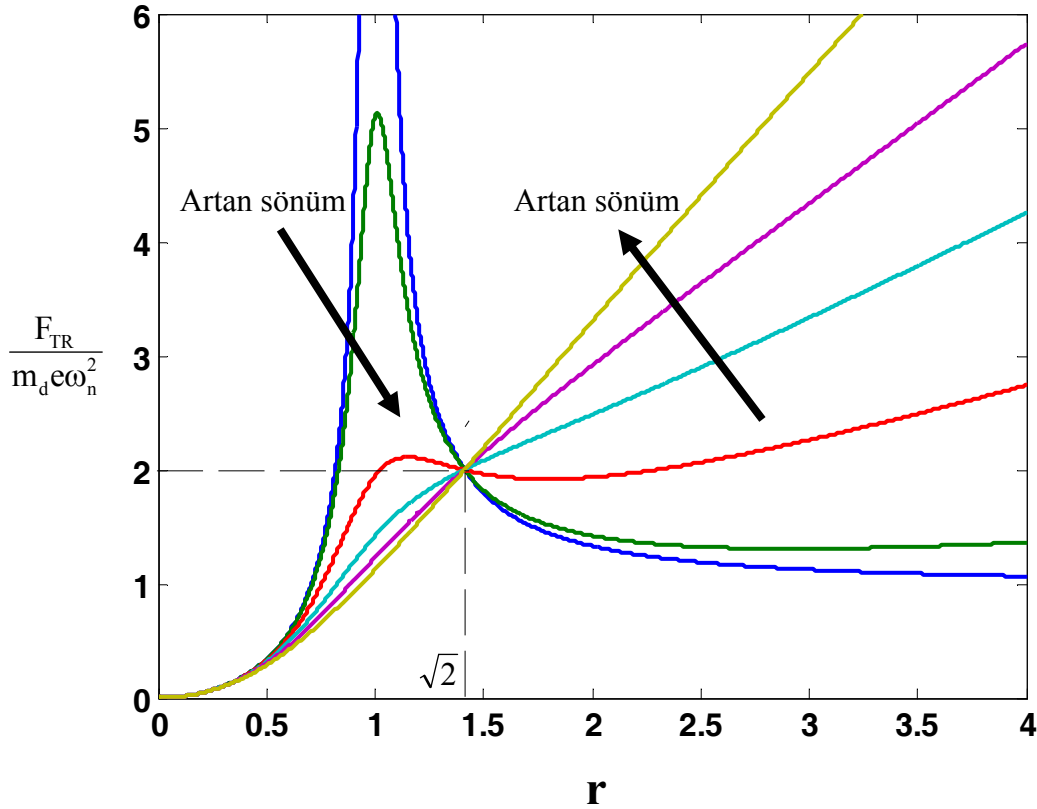
Kütle dengesizliğinden kaynaklanan kuvvetler ile zorlanan tek serbestlik dereceli bir sistem için kütleyle ait yer değiştirme genliği X

$$X = \frac{\frac{m_d e}{m} r^2}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} \text{ idi.}$$

Bu yer değiştirme genliği yukarıda verilen zemine iletilen kuvvet ifadesinde yerine konur ise

$$F_{TR} = \frac{k \frac{m_d e}{m} r^2 \sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} = \frac{\omega_n^2 m_d e r^2 \sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}} \rightarrow \frac{F_{TR}}{m_d e \omega_n^2} = \frac{r^2 \sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)^2}}$$

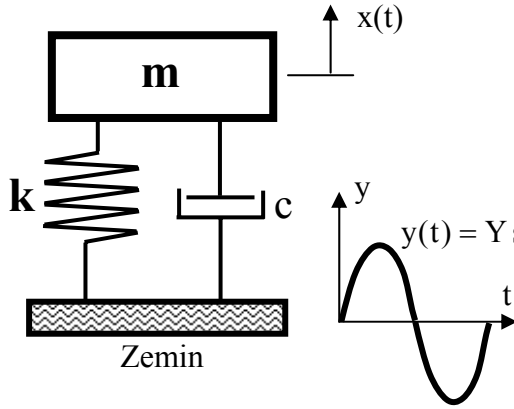
Kütle dengesizliğinden kaynaklanan kuvvetlerin zemine iletilmesi, frekans oranı ve sönüm oranına bağlı olarak aşağıdaki şekilde değişmektedir.



Şekilden görüldüğü gibi, $r < \sqrt{2}$ durumunda zemine iletilen kuvvet sönüm oranı arttıkça azalmakta, $r > \sqrt{2}$ için kütle dengesiliği kaynaklı kuvvetlerin zemine iletilme oranı sönüm oranı arttıkça yüksek oranda artmaktadır.

Harmonik Zemin Zorlaması:

Mühendislik sistemleri farklı formlardaki zemin zorlamalarına maruzdurlar. Bir araç için yoldan gelen uyarılar, deprem kaynaklı zemin uyarıları zemin zorlamalarına verilen tipik örneklerdir. Bu bölümde harmonik formdaki bir zemin zorlaması ile tek serbestlik dereceli bir sistemin yer değiştirme cevabı arasındaki ilişki incelenmiştir.



$$E_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k (x - y)^2$$

$$\delta W = -c(\dot{x} - \dot{y})\delta(x - y)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right)\right) = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{c\omega}{k}\right)$$

Hareket denklemi girdi formu incelendiğinde, zemin zorlamalı tek serbestlik dereceli bir sistemin, kütle üzerine etki eden $Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$ genliğine sahip harmonik formdaki bir zorlamaya maruz sistem ile aynı hareket denklemine sahip olduğu görülebilir. Diğer taraftan hareket denkleminin ilk formu düşünüldüğünde sönüm oranı ve sistemin sönümsüz doğal frekansı cinsinden denklem

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}Y \sin \omega t + \frac{c}{m}\omega Y \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2Y \sin \omega t + 2\zeta\omega_n\omega Y \cos \omega t$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem tek serbestlik dereceli bir sistemin iki farklı harmonik zorlamanın toplamına maruz kalması durumunu yansıtmaktadır. İncelenen sistemin lineer bir sistem olduğu dikkate alınarak, iki farklı harmonik zorlama toplamına verilen cevabın iki farklı zorlamaya verilecek cevapların toplamı olduğu bilgisi kullanılarak,

$$x_{\delta}(t) = x_{\delta}^1(t) + x_{\delta}^2(t)$$

$$x_{\delta}^1(t) = \frac{\omega_n^2 Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad x_{\delta}^2(t) = \frac{2\zeta\omega_n\omega Y}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

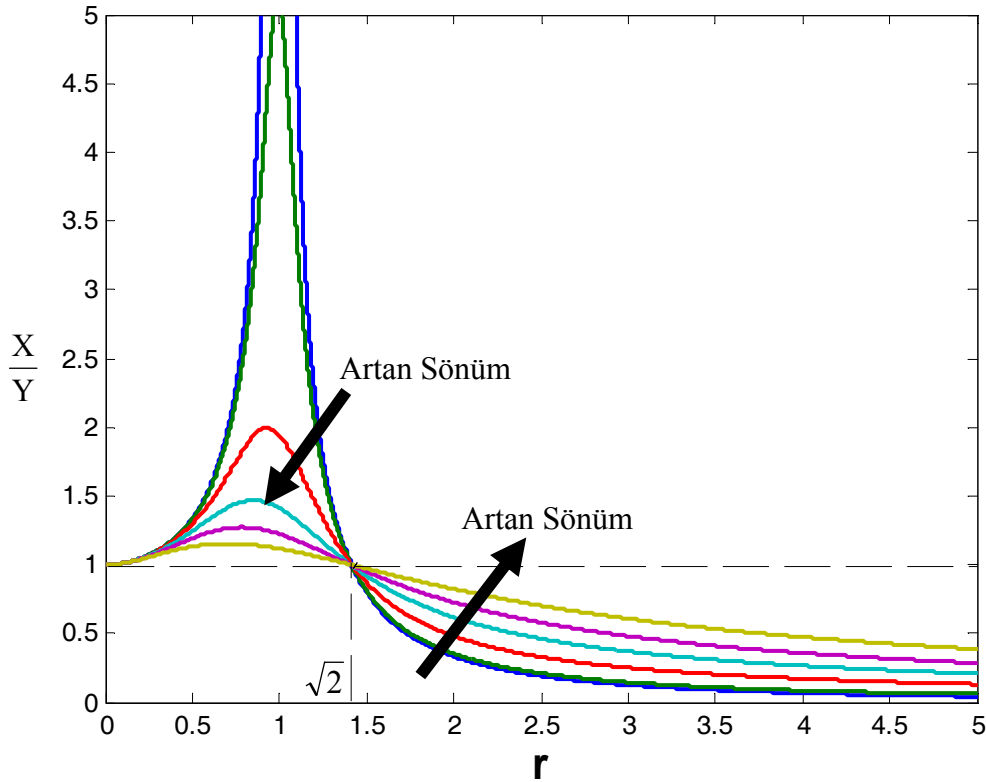
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

$$x_{\delta}(t) = \omega_n Y \sqrt{\frac{\omega_n^2 + (2\zeta\omega)^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \sin(\omega t - \theta) = Y \overbrace{\frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}}^{\mathbf{X}} \sin(\omega t - \theta)$$

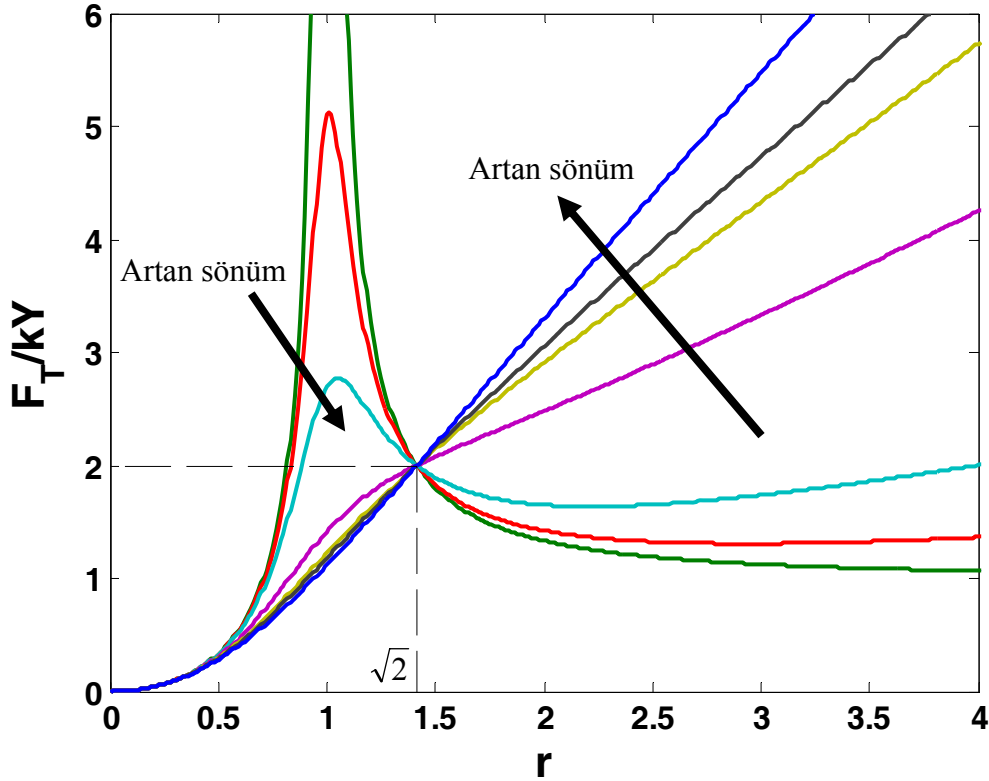
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2} \right)$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (\text{Hareket iletim oranı})$$

Hareket iletim oranı ile Kuvvet iletim oranı ifadelerinin aynı olduğu görülebilir. Hareket iletim oranının frekans oranı ve sönüm oranına bağlı değişimi aynen Kuvvet iletim oranı için bahsedilen şekildedir.

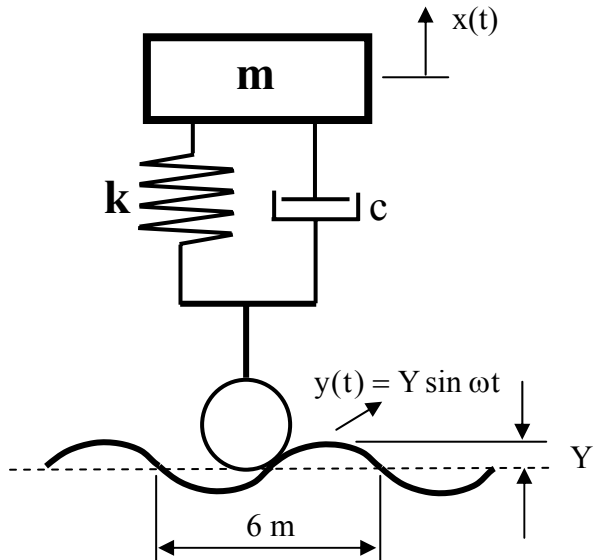


Harmonik formdaki zemin yer değiştirmesi dolayısıyla m kümesine etki eden kuvvet frekans oranı ve sönüm oranına bağlı olarak aşağıdaki şekilde değişmektedir.



Bu değişim kütle dengesi kaynaklı kuvvetlerin zemine iletilmesi ile aynı formdadır. Şekilden görüldüğü gibi, $r > \sqrt{2}$ için harmonik yer değiştirme dolayısıyla ile kütleye uygulanan kuvvet sönüm oranı arttıkça yüksek oranda artmaktadır. Eğrinin sıfırdan başlaması düşük frekans değerleri için yer değiştirme ve hız genlikleri arasında fark olmamasından kaynaklanmaktadır [$F_T = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y})$]

Örnek: Şekilde görülen bir araç modeli sinüs formuna sahip bir yolda ilerlemektedir. Sinüs formundaki yol için genlik değeri (0-max) 4 cm ve yol profili için dalga boyu 6 m olarak verilmektedir. Araç titreşim genliğini hesaplayınız.



$$\begin{aligned}
 m &= 1100 \text{ kg} \\
 k &= 500 \text{ kN/m} \\
 \zeta &= 0.4 \\
 v_{\text{araç}} &= 100 \text{ km/h} \\
 Y &= 0.04 \text{ m} \\
 \lambda &= 6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$v_{\text{araç}} = \frac{100}{3.6} = 27.77 \text{ m/sn}, \lambda = \frac{v_{\text{araç}}}{f} \rightarrow f = \frac{v_{\text{araç}}}{\lambda} = \frac{27.77}{6} = 4.629 \text{ Hz}$$

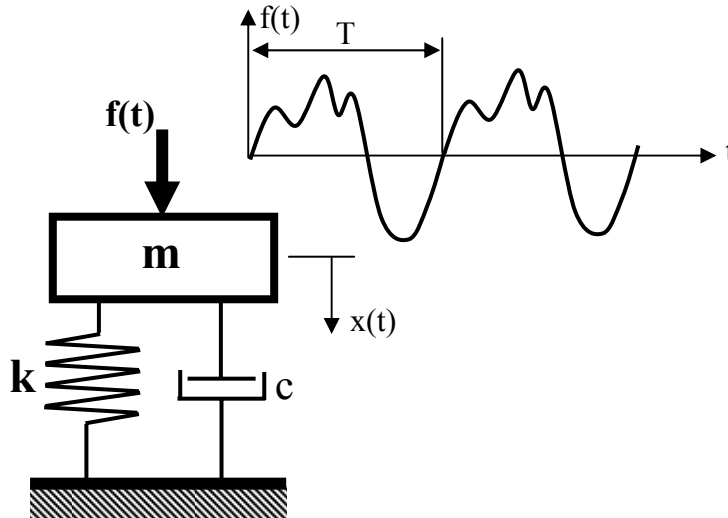
$$\omega = 2\pi \cdot 4.629 = 29.09 \text{ rad/sn}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500000}{1100}} = 21.32 \text{ rad/sn}, r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{29.09}{21.32} = 1.364$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \rightarrow X = 0.04 \frac{\sqrt{1+4 \cdot 0.4^2 \cdot 1.364^2}}{\sqrt{(1-1.364^2)^2 + 4 \cdot 0.4^2 \cdot 1.364^2}} = 0.0425 \text{ m}$$

TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN PERİYODİK ZORLAMALAR CEVABI

Mekanik sistemler üzerine etki eden dış zorlamalar sıklıkla zaman içerisinde düzgün tekrarlı (periyodik) formdadır. Periyodik bir fonksiyon



Daha önce de kısaca bahsedildiği gibi periyodik bir fonksiyon $f(t)$ Fourier seri açılımı kullanılarak saf harmonik sinyallerin toplamları şeklinde ifade edilebilir. Periyodik bir $f(t)$

fonksiyonun tekrarlama periyodu T ve temel frekans değeri $\omega = \frac{2\pi}{T}$ olmak üzere

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad \text{şeklinde ifade edilebilir.}$$

Burada $f(t)$ fonksiyonunu oluşturan katsayılar

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, n=1,2,3\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, n=1,2,3\dots$$

şeklinde tanımlanır.

Daha önceki bölümlerde, tek serbestlik dereceli sönümlü bir sistemin harmonik kuvvet zorlamasına verdiği cevap konusuna değinilmiş idi.

$$f(t) = F \sin \omega t \text{ şeklindeki bir zorlama için cevap } x(t) = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

şeklinde elde edilmişti. Burada $\varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2}$ idi.

Burada $H = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ büyütme faktörü tanımlaması yapılır ise

$$x(t) = \frac{F}{k} H \sin(\omega t - \varphi), \text{ veya girdi } f(t) = F \cos \omega t \text{ formunda ise } x(t) = \frac{F}{k} H \cos(\omega t - \varphi)$$

yazılabilir. Sistemin, periyodik zorlama kuvvetinin seri açılımındaki her bir harmonik zorlamaya cevabı yukarıdaki şekilde hesaplanır ise, lineer sistemler için periyodik girdiye toplam cevabın da bu cevapların toplamı olacağını söylemek mümkündür. Lineer sistemlerde süperpozisyon prensibi geçerlidir.

Periyodik bir zorlamaya maruz tek serbestlik dereceli bir lineer sistemin düzgün rejim cevabı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x_{ss}(t) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} H_n [a_n \cos(n\omega t - \varphi_n) + b_n \sin(n\omega t - \varphi_n)] \text{ dir.}$$

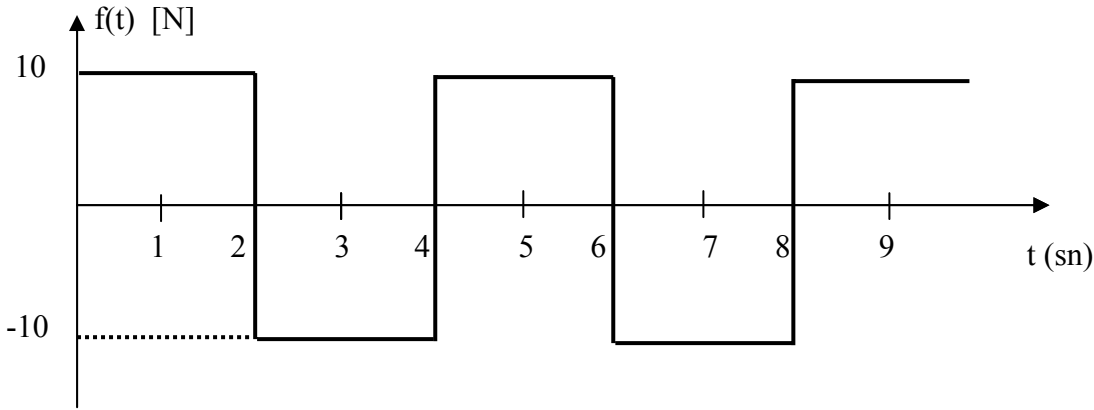
Burada

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + (2\zeta r_n)^2}}, r_n = \frac{n\omega}{\omega_n}, \varphi_n = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta r_n}{1-r_n^2} \right) \text{ dir.}$$

Temel frekans
↙
↘
Doğal frekans

Örnek:

Şekilde verilen periyodik zorlamanın Fourier açılımını elde edelim.



$$T=2 \text{ sn} \quad \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/sn.} \quad f(t) = \begin{cases} 10 & 0 < t < 2 \\ -10 & 2 < t < 4 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{4} \left[\int_0^2 10 dt + \int_2^4 -10 dt \right] = \frac{1}{2} \left[10t \Big|_0^2 - 10t \Big|_2^4 \right] = \frac{1}{2} [20 - 0 - 40 + 20] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} 10 \cos n \frac{\pi}{2} t dt - \int_{T/2}^T 10 \cos n \frac{\pi}{2} t dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^2 10 \cos n \frac{\pi}{2} t dt - \int_2^4 10 \cos n \frac{\pi}{2} t dt \right]$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{2 * 10}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} t \Big|_0^2 - \frac{2 * 10}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} t \Big|_2^4 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{20}{n\pi} (\sin n\pi - \sin 0) - \frac{20}{n\pi} (\sin 2n\pi - \sin n\pi) \right] = 0$$

$a_n=0$ (Tek fonksiyonlarda $a_n=0$ 'dır)

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} 10 \sin n \frac{\pi}{2} t dt - \int_{T/2}^T 10 \sin n \frac{\pi}{2} t dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^2 10 \sin n \frac{\pi}{2} t dt - \int_2^4 10 \sin n \frac{\pi}{2} t dt \right]$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left[-\frac{2 * 10}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} t \Big|_0^2 + \frac{2 * 10}{n\pi} \cos n \frac{\pi}{2} t \Big|_2^4 \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{20}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) + \frac{20}{n\pi} (\cos n2\pi - \cos n\pi) \right]$$

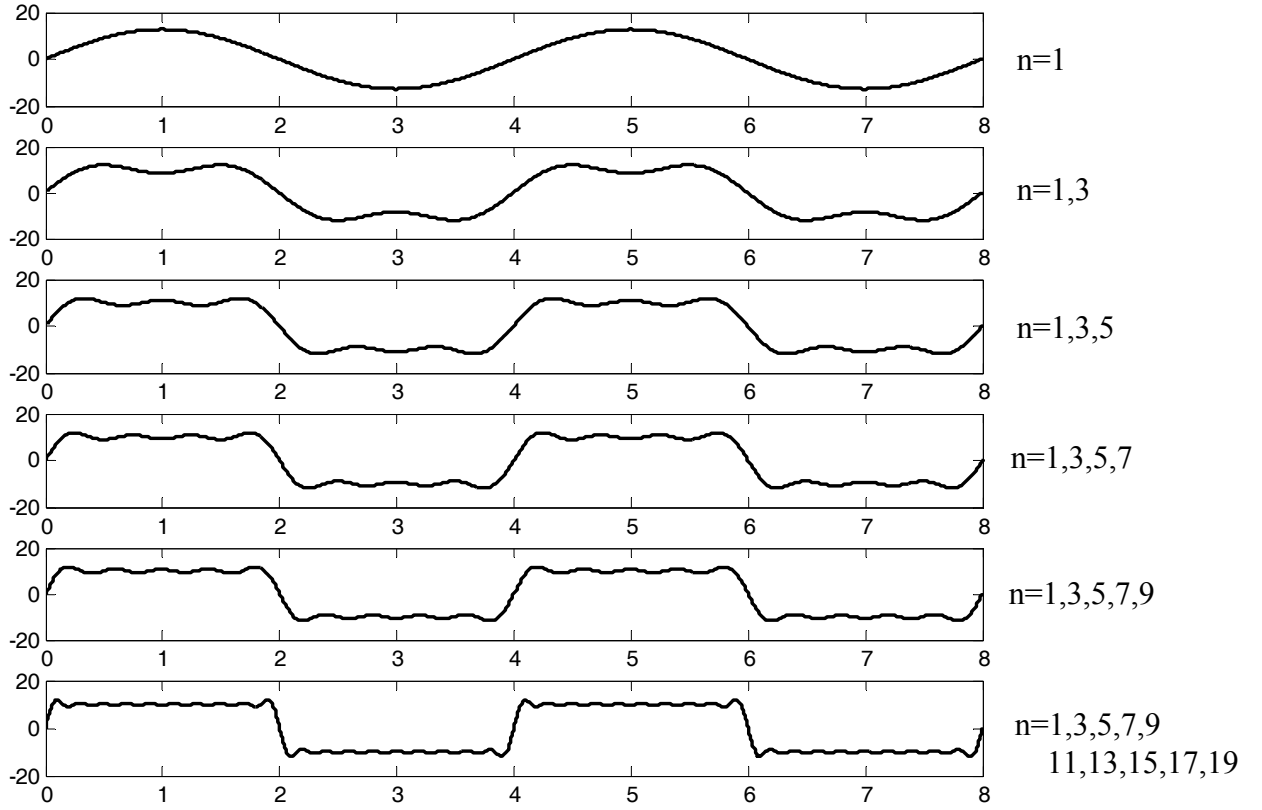
$$b_n = \frac{10}{n\pi} [(1 - \cos n\pi) + (\cos n2\pi - \cos n\pi)] = \frac{10}{n\pi} [1 - 2 \cos n\pi + \cos 2n\pi] = \frac{10}{n\pi} [2 * (1 - \cos n\pi)] = \frac{20}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$b_n = \frac{20}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \text{ (Tek fonksiyonlarda } b_n \neq 0 \text{'dır)}$$

Bu durumda zorlama fonksiyonu

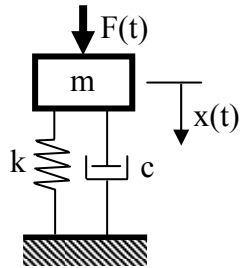
$$f(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) \sin n \frac{\pi}{2} t \text{ şeklindedir.}$$

n=2 ve katları için f(t)=0 dır. Dolayısı ile f(t) tek ne değerleri için hesaplanır.

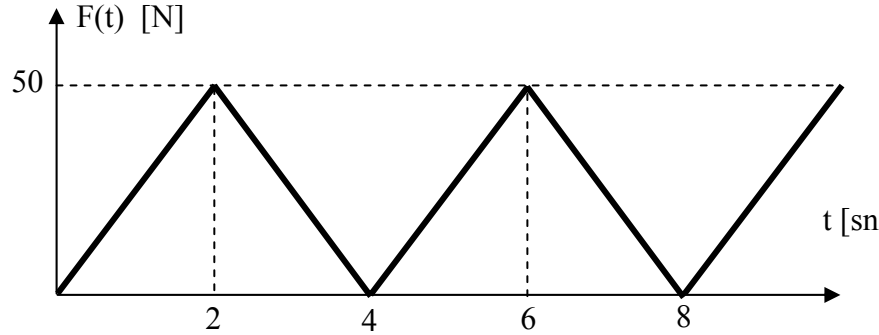


Şekil. f(t) fonksiyonu Fourier açılımı.

Örnek:



$m=20 \text{ kg}$
 $c=100 \text{ Ns/m}$
 $k=10000 \text{ N/m}$



$T=4 \text{ sn}$
 $\omega T=2\pi \rightarrow \omega=0.5\pi \text{ (rad/sn)}$

$$F(t) = \begin{cases} 25t & 0 \leq t \leq 2 \\ (100 - 25t) & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Fourier Serisi:

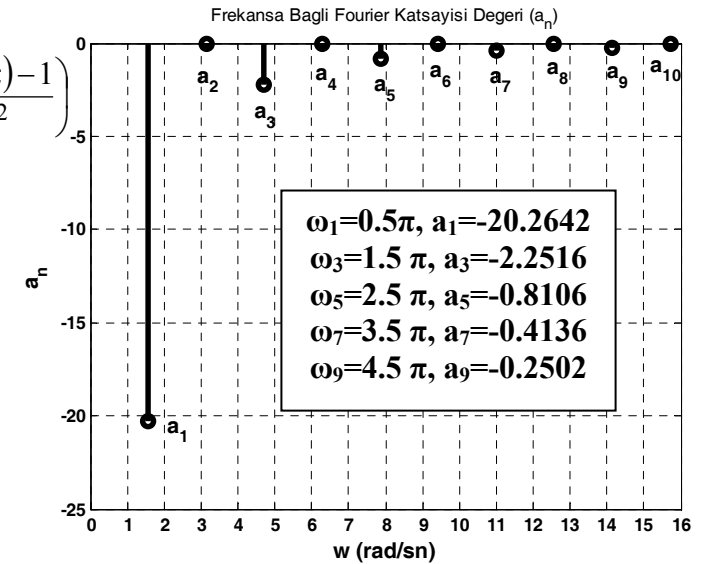
$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F_t dt = \frac{2}{4} \left[\int_0^2 25t dt + \int_2^4 (100 - 25t) dt \right] = 50$$

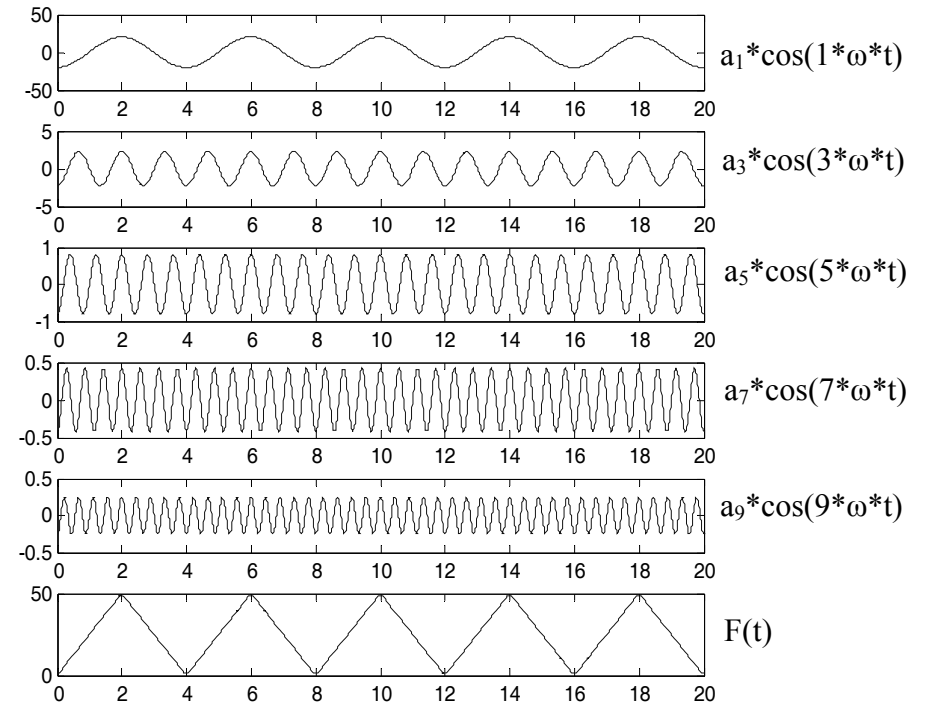
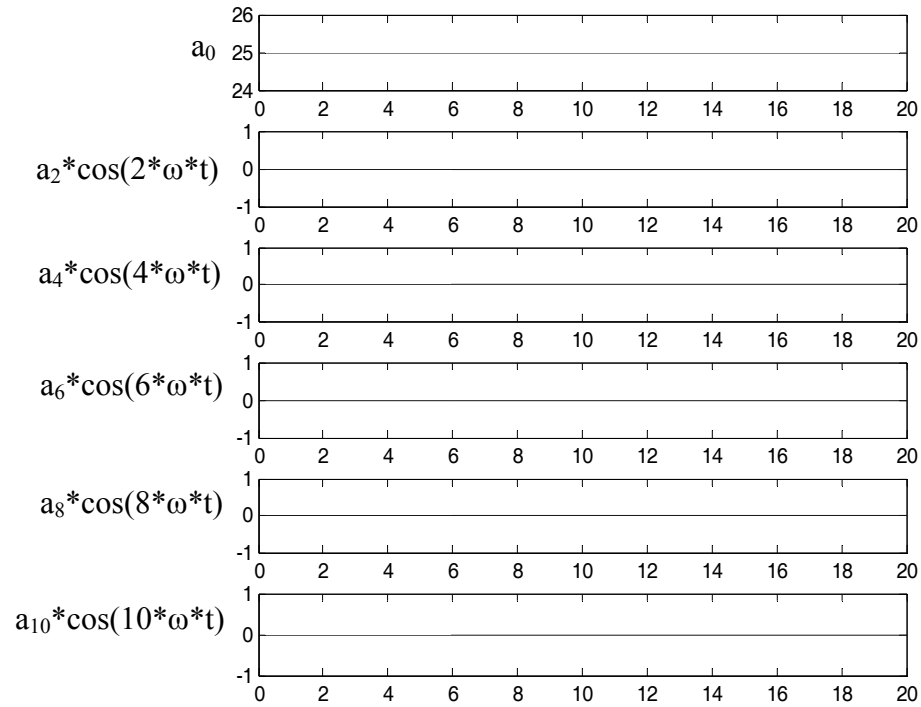
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F_t \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{4} \left[\int_0^2 25t \cos(n\omega t) dt + \int_2^4 (100 - 25t) \cos(n\omega t) dt \right] = 100 \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2 \pi^2} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F_t \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{4} \left[\int_0^2 25t \sin(n\omega t) dt + \int_2^4 (100 - 25t) \sin(n\omega t) dt \right] = 0$$

$$F(t) = \frac{50}{2} + \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - 1] \cos(n\omega t)$$



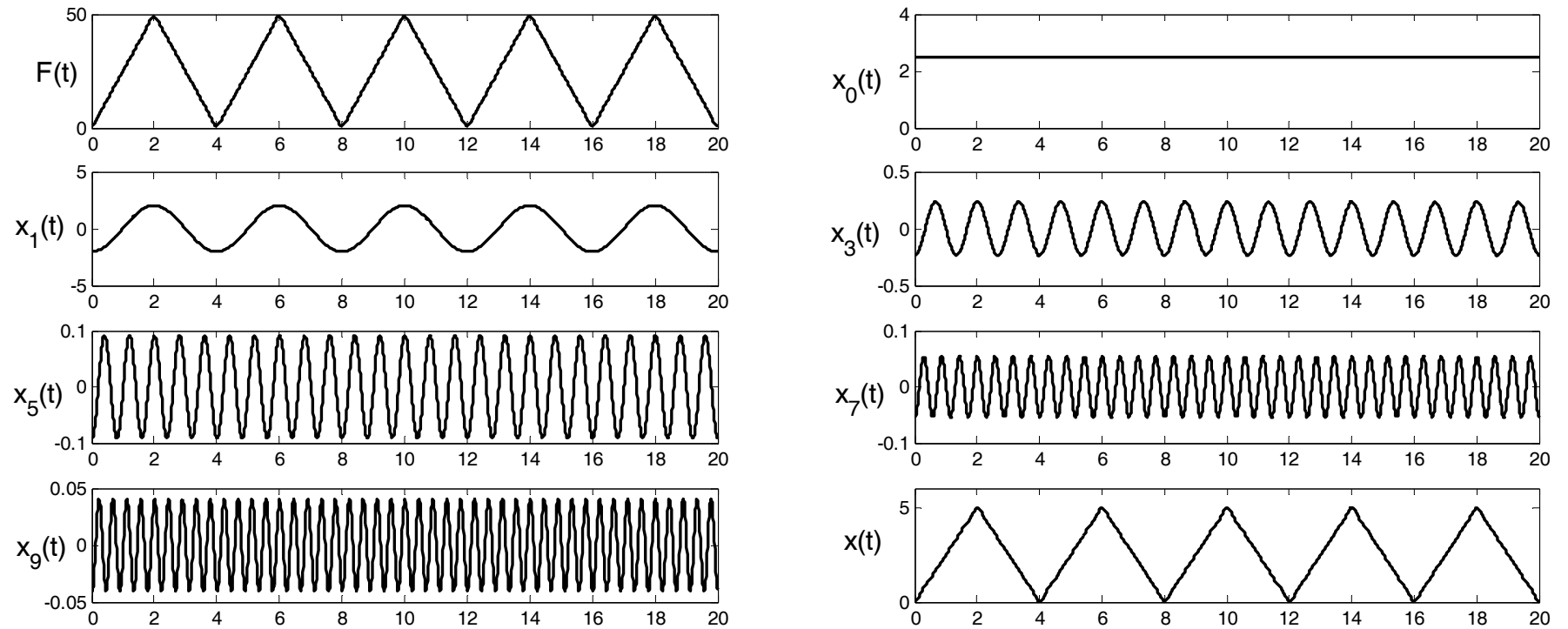
$$F(t) = \frac{50}{2} + \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\cos(n\pi) - 1] \cos(n 0.5 \pi t)$$



$$H_i = \frac{1}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + (2\xi r_i)^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r_i}{1-r_i^2}\right)$$

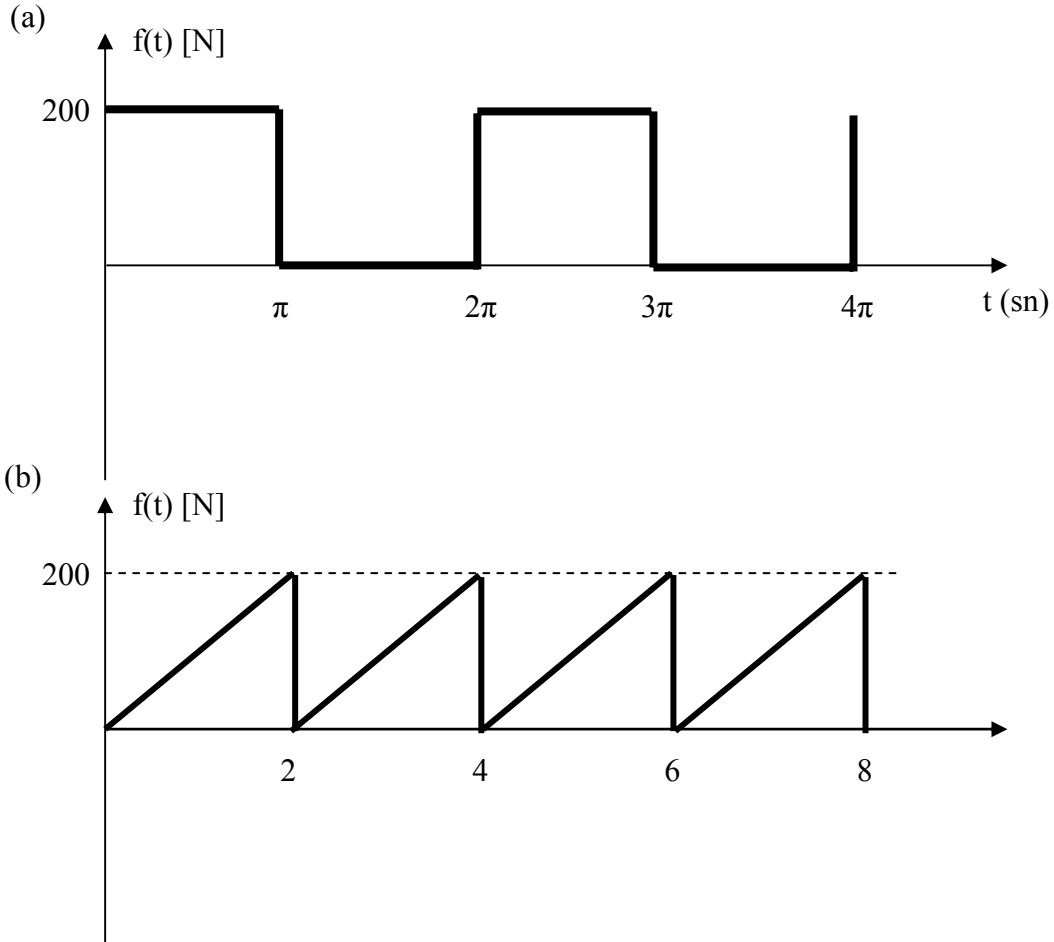
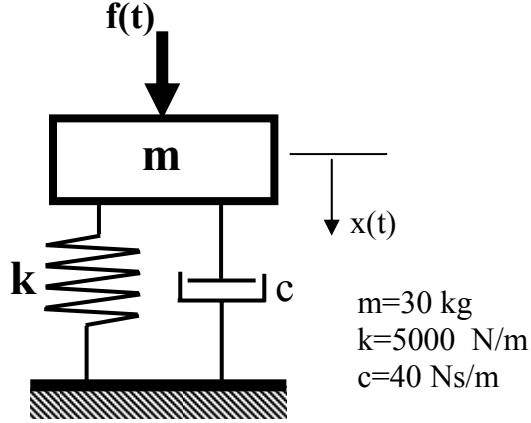
$H_1=1.0048, \varphi_1=0.0158 \text{ rad}$
 $H_3=1.0452, \varphi_3=0.0493 \text{ rad}$
 $H_5=1.1362, \varphi_5=0.0894 \text{ rad}$
 $H_7=1.3053, \varphi_7=0.1440 \text{ rad}$
 $H_9=1.6215, \varphi_9=0.2313 \text{ rad}$

$$x(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2k}}_{x_0(t)} - \underbrace{\frac{20.2642 H_1}{k} \cos(0.5\pi t - \varphi_1)}_{x_1(t)} - \underbrace{\frac{2.2516 H_3}{k} \cos(1.5\pi t - \varphi_3)}_{x_3(t)} - \underbrace{\frac{0.8106 H_5}{k} \cos(2.5\pi t - \varphi_5)}_{x_5(t)} - \underbrace{\frac{0.4136 H_7}{k} \cos(3.5\pi t - \varphi_7)}_{x_7(t)} - \underbrace{\frac{0.2502 H_9}{k} \cos(4.5\pi t - \varphi_9)}_{x_9(t)}$$



ÖDEV:

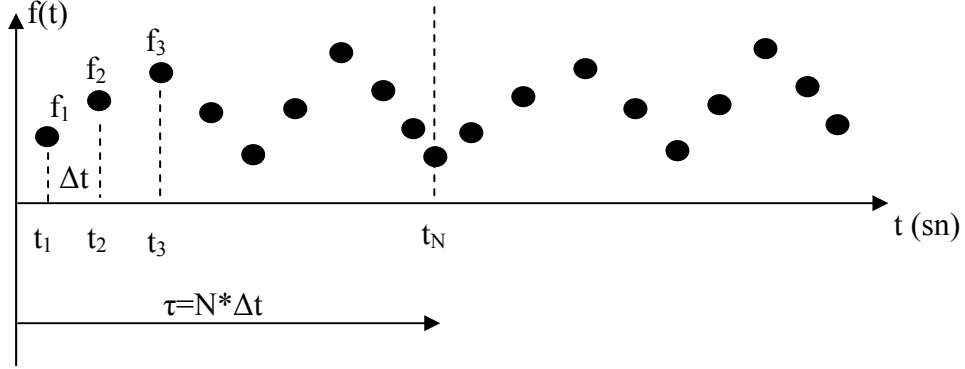
Şekilde verilen tek serbestlik dereceli sistemin verilen periyodik girdilere cevabını bulunuz.



Hesaplamalarda $n=20$ 'ye kadar dikkate alınız. Fourier katsayılarının frekansa göre değişimini, zorlama fonksiyonunu ve cevabı grafikler halinde gösteriniz. Ödevinizde tüm hesaplamaları veriniz. Ödevinizi Office Word 2003 formatında hazırlayıp, pdf dosya ve çıktı olarak teslim ediniz.

Zorlama Fonksiyonunun Örnekleri Mevcut İse:

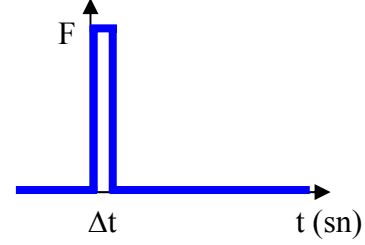
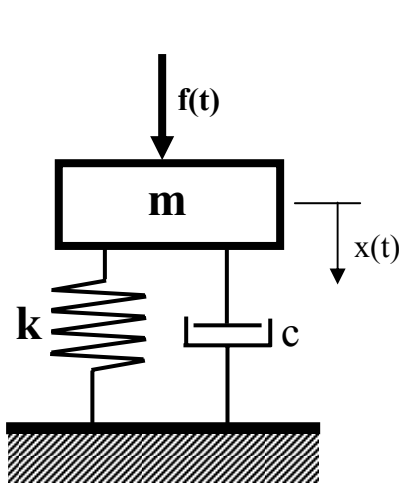
Bazı durumlarda zorlama fonksiyonunun kapalı formu yerine örneklenmiş hali mevcut olabilir. Bu durumda Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.



$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f_i, \quad a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cos \frac{2\pi n t_i}{\tau}, \quad b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sin \frac{2\pi n t_i}{\tau} \quad n=1,2,3\dots$$

MEKANİK TİTREŞİMLER

Darbe (Impulse) ve Basamak (Step) Cevapları: Bu bölümde tek serbestlik bir dereceli sistem için darbe ve basamak girdilere karşı cevaplar üzerinde durulmuştur.



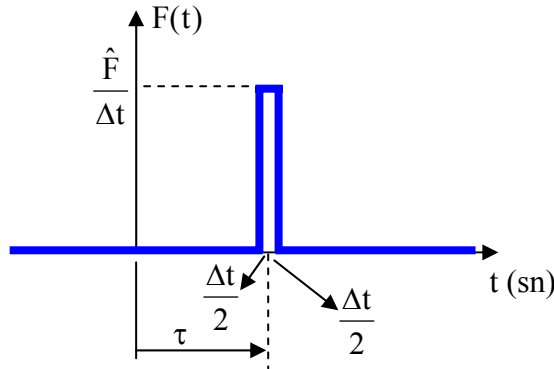
$$\dot{x} = 0 \quad F \Delta t \quad \dot{x} = x_0$$

$$\boxed{m} + \boxed{F \Delta t} = \boxed{m}$$

Sistem momentumu
(Impuls'dan önce)

Impuls Girdi

Sistem momentumu
(Impuls'dan sonra)



$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \tau - \frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\hat{F}}{\Delta t} & \tau - \frac{\Delta t}{2} < t < \tau + \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & t \geq \tau + \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

m kütlelerine etki eden impuls şeklindeki kuvvet, kısa süreli ve büyük genlikli bir kuvvet olarak nitelendirilir. Impuls şiddetini tanımlamak için $F(t)$ kuvveti integre edilir.

$$I(\Delta t) = \int_{\tau - \frac{\Delta t}{2}}^{\tau + \frac{\Delta t}{2}} F(t) dt$$

$F(t)$ kuvveti sadece Δt aralığında sıfırdan farklı bir değere sahip olduğu için yukarıdaki integral sınırları aşağıdaki gibi genişletilebilir.

$$I(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \quad (\text{Ns})$$

Yukarıda tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu için eğri altında kalan hesaplanır ise

$$I(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = \frac{\hat{F}}{\Delta t} \Delta t = \hat{F}, \quad F(t - \tau) = 0 \quad t \neq \tau, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) dt = \hat{F}$$

Eğer $\hat{F}=1$ ise bu durum birim impuls girdi tanımını oluşturmaktadır ve $\delta(t)$ ile gösterilir, ayrıca Dirac Delta fonksiyonu olarak da ifade edilir.

Bir sisteme etki eden impuls nitelikli bir kuvvet, sisteme bir ilk hız kazandırır. Bu ilk hız

$$\dot{x}(0) = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{\hat{F}}{m} \text{ dir.}$$

Durağan haldeki tek serbestlik dereceli kritik altı sönümlü bir sistem için başlangıç hızına bağlı titreşim cevabı

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$\hat{F}=1$ için kuvvet birim impuls olarak adlandırılır ve bu durumda sistem serbest titreşim cevabı

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \text{ dir. Bu çözüme tek serbestlik dereceli sistemin } t=0 \text{ 'da etki den}$$

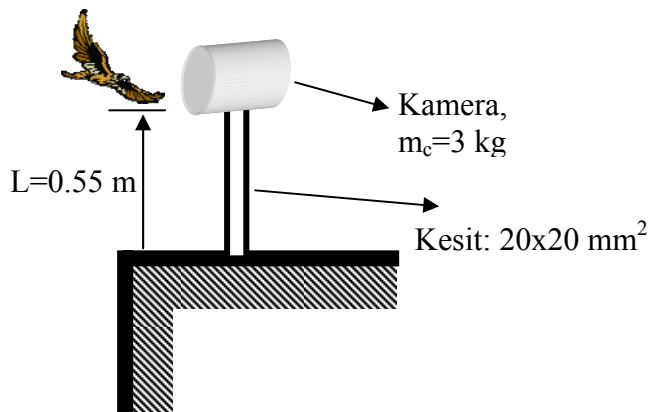
birim impuls girdiye cevabı adı verilir ve $h(t)$ ile gösterilir. \hat{F} şiddetindeki bir impuls girdi için cevap $x(t) = \hat{F}h(t)$ olarak yazılır. Eğer birim impuls girdi $t=\tau$ da ($\tau \neq 0$) etki ediyor ise cevap

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) \text{ dur.}$$

Bu cevap genel formulu bir zorlama için de kullanılacaktır.

Örnek:

1 kg ağırlığındaki bir kuş 72 km/h hız ile uçarken şekilde gösterilen kameraya çarpmaktadır. (Kuş zarar görmüyor). Kameranın maksimum yer değiştirme genliğini hesaplayınız. $E=71 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.



$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F\delta(t)$$

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Çarpışma sırasındaki impuls şiddeti $\hat{F} = m_k v_k = 1 \times \frac{72}{3.6} = 20 \text{ kg m/s}$

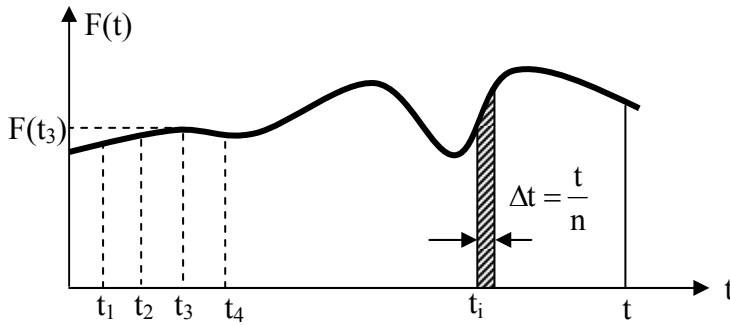
$$k = \frac{3 \times 71 \times 10^9 \times 0.02^4}{0.55^3} = 2.048 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$\text{Doğal frekans değeri } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_c}} = \sqrt{\frac{2.048 \times 10^5}{3}} = 261.3 \text{ rad/s}$$

Sönüm oranı $\zeta=0$ için

$$x(t) = \frac{m_k v_k}{m_c \omega_n} \sin \omega_n t = \frac{20}{3 \times 261.3} \sin 261.3 t = 0.0255 \sin 261.3 t$$

Tek serbestlik dereceli sistemin impulse cevabı kullanılarak, sistemin genel formulu bir zorlamaya cevabı hesaplanabilir. n aralığa bölünmüş bir zorlama aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Her bir t_i anındaki cevap, Δt zaman süren ve kuvvet genliği $F(t_i)$ olan bir impuls zorlamaya cevap olarak elde edilebilir. (Impuls genliği $[F(t_i)\Delta t]$)



t_i anında etki eden impuls'a cevap aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\Delta x(t_i) = F(t_i) h(t - t_i) \Delta t$$

j zaman aralığı sonundaki toplam cevap

$$x(t_j) = \sum_{i=1}^j F(t_i) h(t - t_i) \Delta t$$

Sistem lineer olduğu için süperpozisyon prensibi geçerlidir. Yukarıdaki denklem bunun bir ifadesidir. Δt sıfıra giderken $\Delta t \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

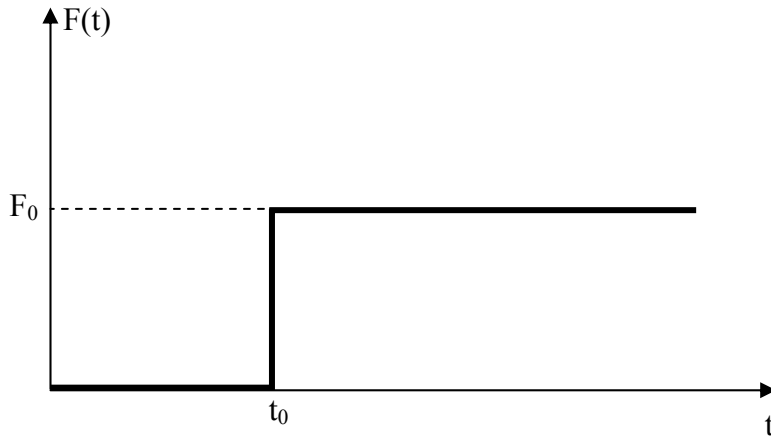
Bu integral convolution integrali olarak adlandırılır (Ayrıca Duhamel integrali olarak da bilinir). Convolution integrali biri integral değişkeni ile kaydırılmış iki fonksiyonun çarpımının integralidir. Convolution integrali aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$x(t) = \int_0^t F(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

Duhamel integrali genel formulu bir girdiye cevabın hesaplanması için kullanılmaktadır.

Örnek:

Tek serbestlik dereceli bir sistemin şekilde verilen girdiye cevabını bulunuz. Başlangıç şartları sıfırdır ve sistem kritik altı sönümlüdür.



$$F(t) = \begin{cases} 0, & t_0 > t > 0 \\ F_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) = \begin{cases} 0, & t_0 > t > 0 \\ F_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \left[\int_0^{t_0} (0) e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau + \int_0^{t_0} F_0 e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_{t_0}^t e^{\zeta\omega_n \tau} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau$$

İntegral alınırsa ve düzenlenirse

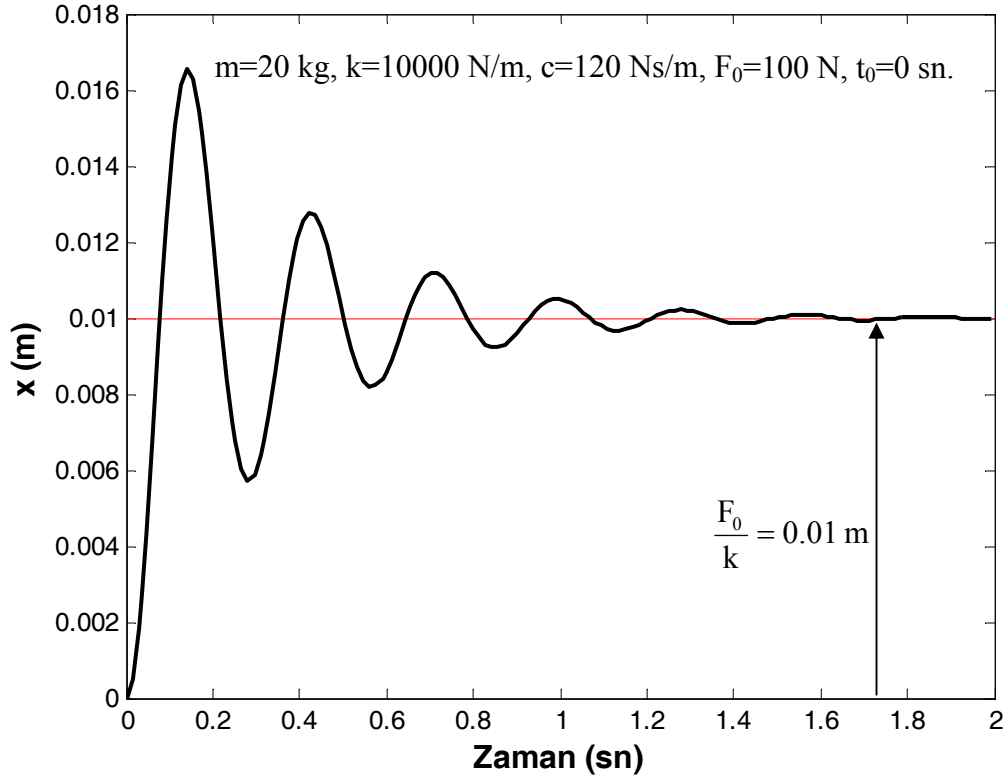
$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n (t - t_0)} \cos[\omega_d (t - t_0) - \theta] \right) \quad t \geq t_0, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Eğer $t_0=0$ ise

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos[\omega_d t - \theta] \right)$$

Sönüm yok ise cevap ($\zeta=0$)

$x(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_n t)$, burada F_0/k düzenli rejim genliğidir.

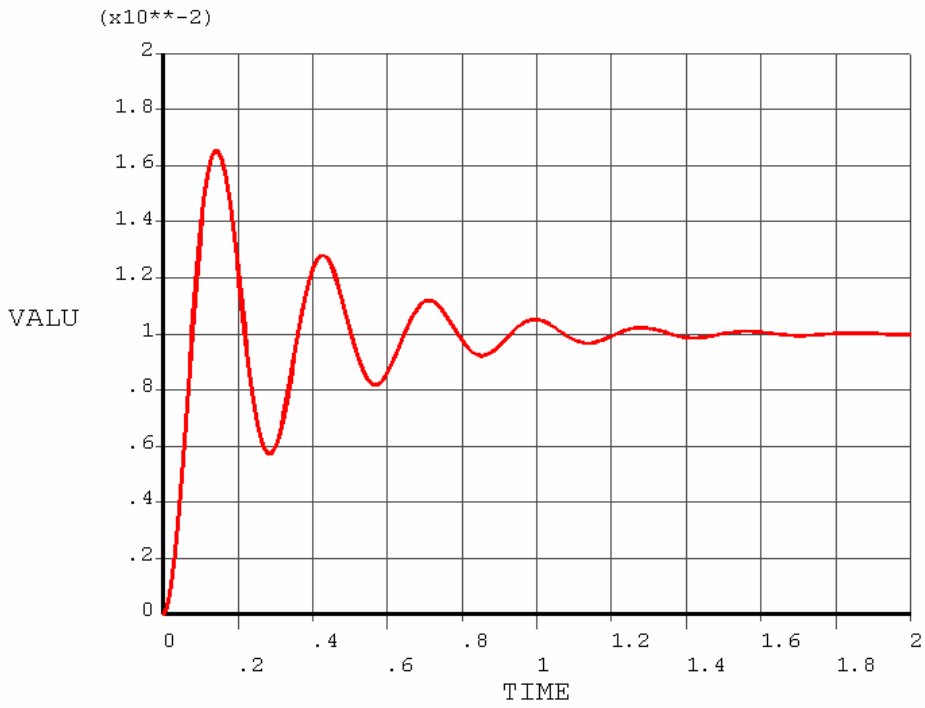


ANSYS ile Çözüm: Yukarıda verilen problemi ANSYS APDL ile yazılan aşağıdaki programın çalıştırılması ile çözebiliriz.

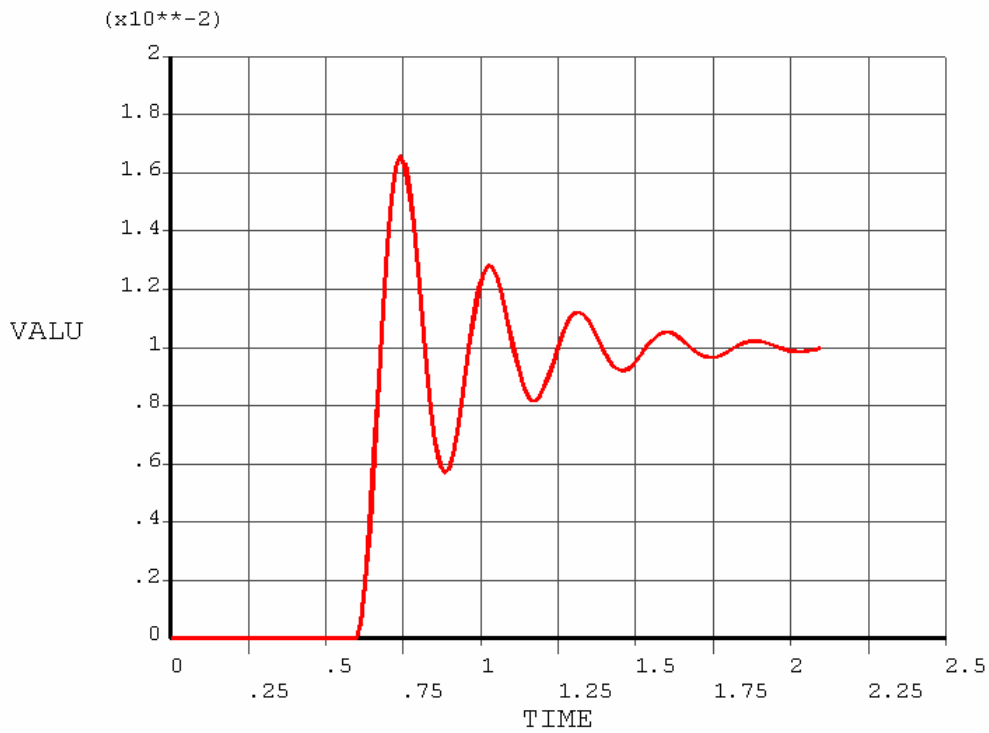
```

/prep7                                eplot                                /solu
et,1,mass21                             /solu                                antype,trans
et,2,combin14                            antype,modal                        outres,all,all
                                           modopt,lanb,1                       kbc,0
                                           delt,dt
m=20                                     d,all,ux,0                          f,2,fy,100
c=120                                   d,all,uz,0                          time,deltim/10
k=10000                                 d,1,uy,0                             solve
                                           solve                                f,2,fy,100
                                           *get,f1,mode,1,freq                 time,tson
                                           t1=1/f1                             solve
                                           wn=2*3.1416*f1                       finish
                                           ksi=c/(2*sqrt(k*m))                  /post26
                                           tson=t1/ksi                          nsol,2,2,uy
                                           dt=t1/20                              plvar,2
                                           finish
e,1,2

```

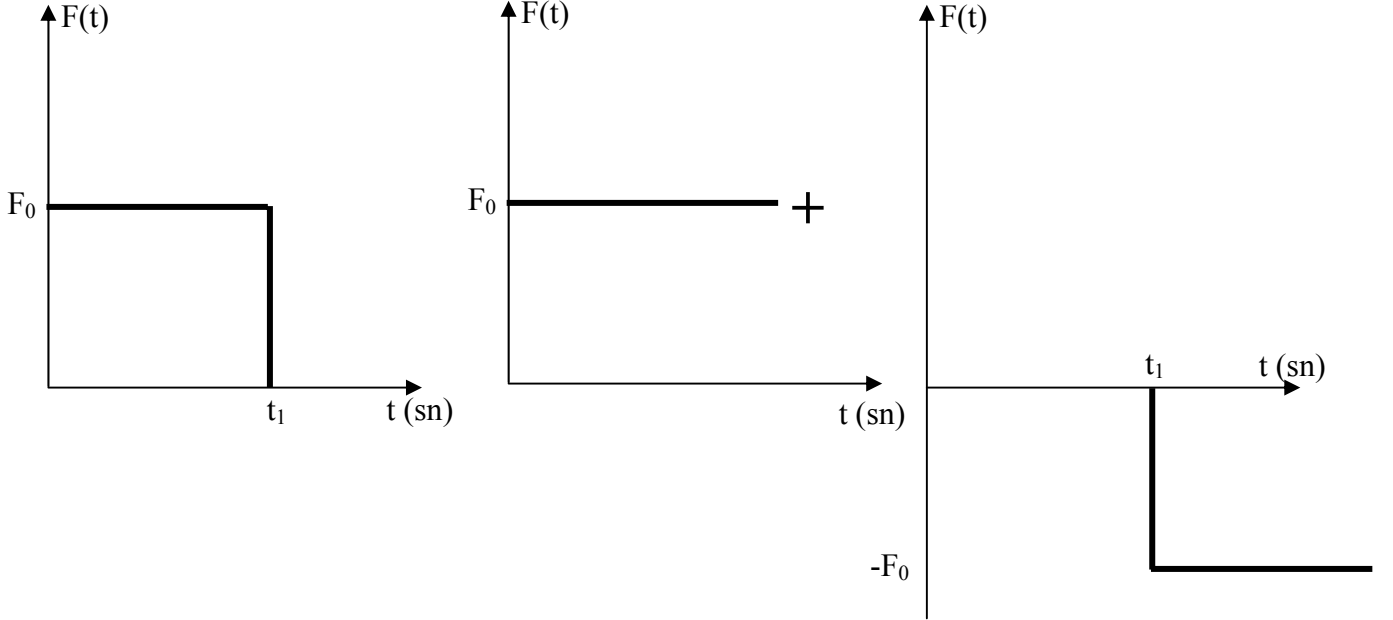


$t_0=0.6$ sn



Örnek:

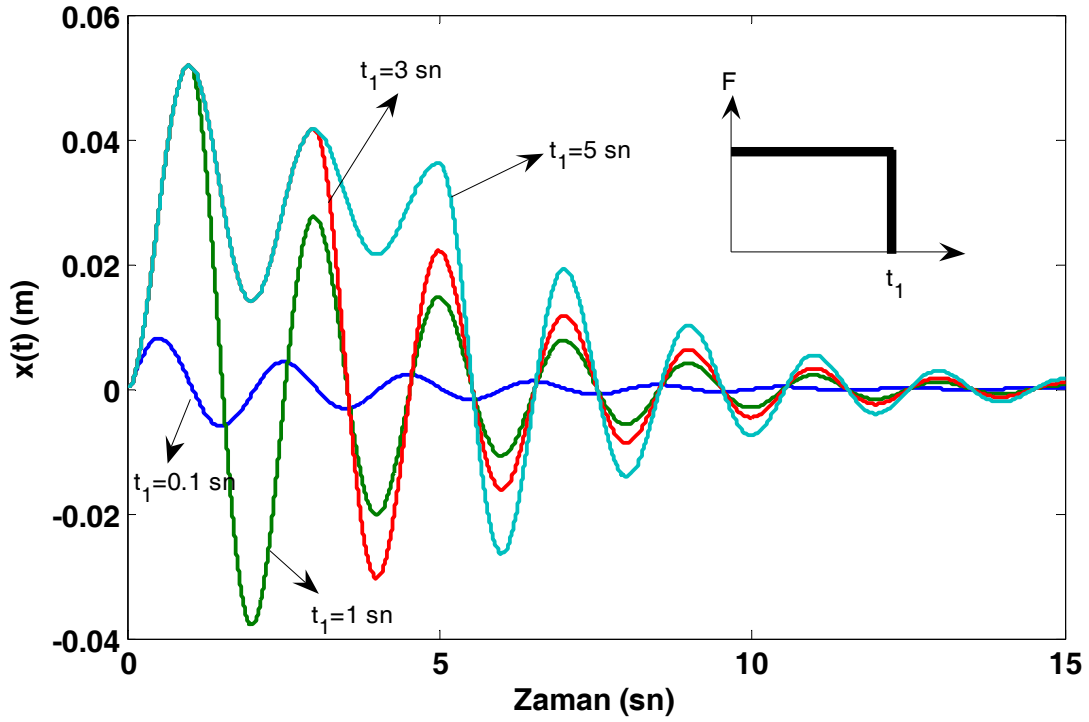
$F_0=30$ N, $k=1000$ N/m, $\zeta=0.1$ ve $\omega_n=3.16$ rad/sn değerlerine sahip tek serbestlik dereceli bir sistemin şekilde verilen girdiye cevabını bulunuz. Başlangıç şartları sıfırdır ve sistem kritik altı sönümlüdür. Girdi aşağıdaki gibi iki girdinin toplamı olarak da ifade edilebilir.



Şekilde görüldüğü tek serbestlik dereceli sisteme etki t_1 süreli ve F_0 genlikli zorlama şekildeki gibi F_0 genlikli sürekli bir zorlama ile t_1 zamanında başlayan $-F_0$ genlikli diğer bir sürekli zorlamanın toplamı ile ifade edilebilir. $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$. Lineer sistemlerde süperpozisyon prensibi geçerli olduğu için sistemin cevabı bu iki zorlamaya olan cevapların toplamı şeklinde olacaktır. $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$. Dolayısı ile

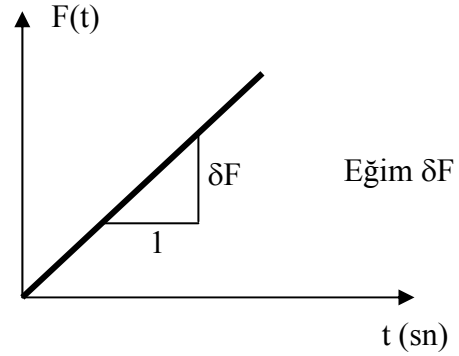
$$x_1(t) = \underbrace{\frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos[\omega_d t - \theta] \right)}_{\text{Tüm } t \text{ değerleri için}} + \underbrace{\frac{-F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] \right)}_{t > t_1 \text{ değerleri için}}$$

$$x_1(t) = \frac{F_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{k\sqrt{1-\zeta^2}} \left(e^{\zeta\omega_n t_1} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] - \cos(\omega_d t - \theta) \right), \quad t > t_1$$



Zorlama Fonksiyonu Rampa Şeklinde İse:

Tek serbestlik dereceli bir sistem için rampa şeklinde bir zorlama söz konusu ise zamana bağlı yer değiştirme cevabı aşağıdaki formdadır.



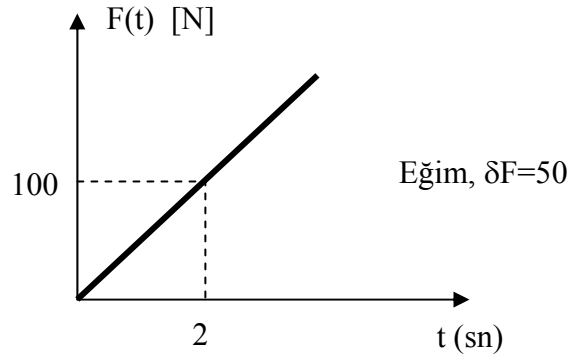
$$x(t) = \frac{\delta F}{k} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t - \left(\frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \right) \sin \omega_d t \right) \right]$$

Eğer sönüm sıfır ise ($\zeta=0$)

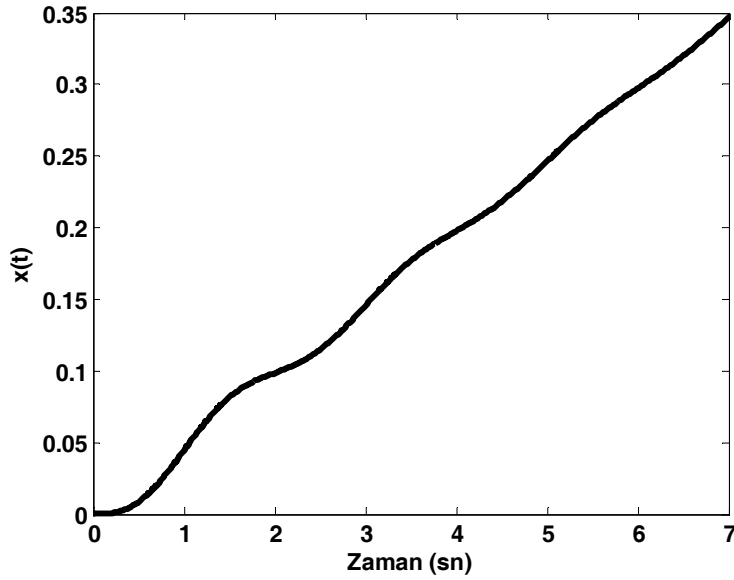
$$x(t) = \frac{\delta F}{k \omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t] \text{ sonucu elde edilir.}$$

Örnek:

Yukarıdaki örnekte verilen sistemin yanda gösterilen zorlamaya cevabını hesaplayınız.

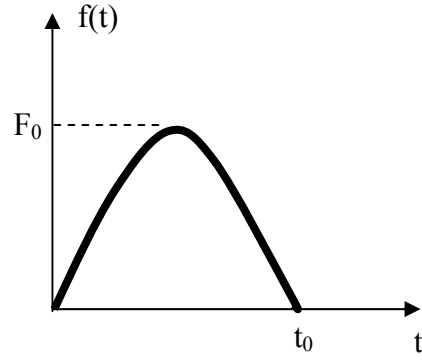
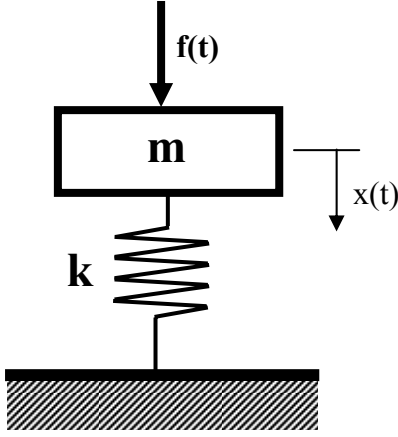


$$k=1000 \text{ N/m, } \zeta=0.1 \text{ ve } \omega_n=3.16.$$

**ŞOK SPEKTRUMU (SHOCK SPECTRUM-RESPONSE SPECTRUM)**

Mühendislik sistemleri çalışma şartlarında kısa süreli darbe nitelikli zorlamalara maruz kalabilirler. Bir zorlamanın etkime süresi sistemin 1. doğal periyodundan küçük ise bu tip zorlamalara şok girdi adı verilir. Darbe etkisi ile oluşan en büyük yer değiştirme cevabının sistemin doğal frekansına göre değişimi şok spektrumu olarak adlandırılır.

Örnek: Şekildeki tek serbestlik dereceli sönümsüz sistemin, şekilde gösterilen yarım sinüs şeklindeki zorlama durumu için şok spektrumunu elde ediniz. Sistem başlangıçta durağandır.



$$\omega T = 2\pi \rightarrow \omega 2t_0 = 2\pi \rightarrow \omega = \frac{\pi}{t_0}$$

$$m\ddot{x} + kx = f(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

Sistemin genel çözümü $x(t) = x_h(t) + x_o(t)$ şeklindedir.

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \sin \omega t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Başlangıç şartlarından

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \rightarrow A=0, B = -\frac{F_0 \omega}{\omega_n (k - m\omega^2)}$$

Bu durumda genel çözüm şu şekilde yazılabilir.

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad 0 \leq t \leq t_0$$

Sistemin doğal periyodu ve darbe süresi kullanılarak cevap şu şekilde de yazılabilir.

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T_n}{2t_0}\right)^2} \left(\sin \frac{\pi}{t_0} t - \frac{T_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi}{T_n} t \right) \quad 0 \leq t \leq t_0$$

$$\rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{t_0}{2\pi} = \frac{T_n}{2t_0}$$

Yukarıdaki çözüm $0 \leq t \leq t_0$ zaman aralığı için geçerlidir. $t > t_0$ da kuvvet ortadan kalktığı için serbest çözüm geçerlidir.

$$x(t) = A' \cos \omega_n t + B' \sin \omega_n t \quad t > t_0$$

Serbest çözümün başladığı andaki (pulsun bittiği anda) x ve \dot{x} değerleri kullanılarak

$$x(t = t_0) = \alpha \left[-\frac{T_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi t_0}{T_n} \right] = A' \cos \omega_n t + B' \sin \omega_n t$$

$$\dot{x}(t = t_0) = \alpha \left[\frac{\pi}{t_0} - \frac{\pi}{t_0} \cos \frac{2\pi t_0}{T_n} \right] = -\omega_n A' \sin \omega_n t + \omega_n B' \cos \omega_n t$$

$$\text{Burada } \alpha = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{T_n}{2t_0} \right)^2}$$

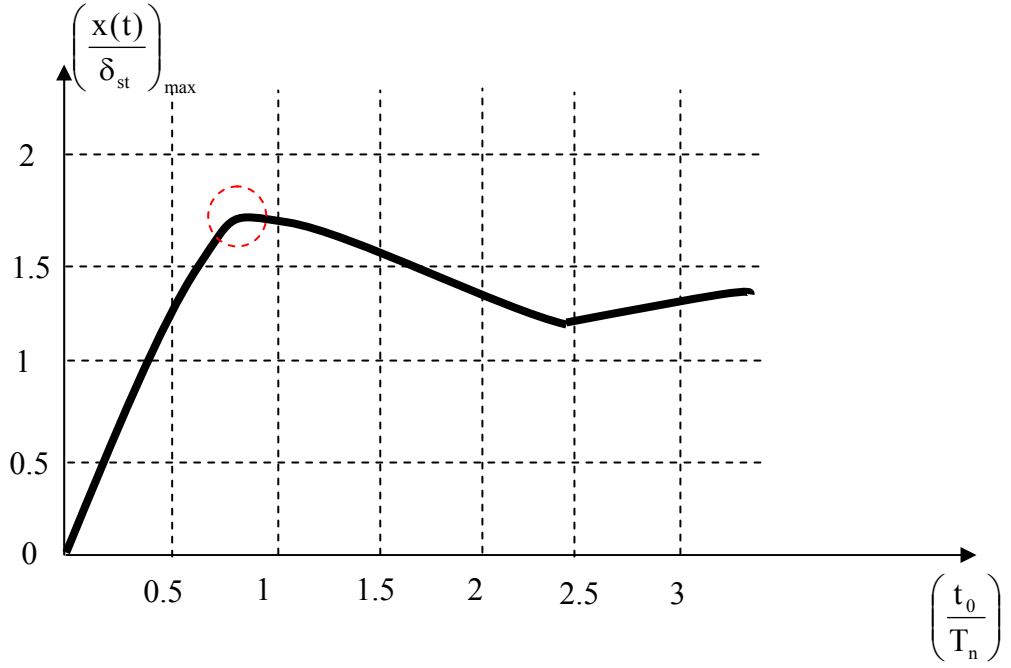
Yukarıdaki iki denklem kullanılarak kuvvetten sonraki serbest titreşim durumunu için A' ve B' katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A' = \frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t_0, \quad B' = -\frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} [1 + \cos \omega_n t_0]$$

Bu katsayılar serbest titreşim denkleminde yerine konur ise

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{T_n / t_0}{2 \left(1 - \left(\frac{T_n}{2t_0} \right)^2 \right)} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t_0}{T_n} - \frac{t}{T_n} \right) - \sin \left(2\pi \frac{t}{T_n} \right) \right], \quad t > t_0$$

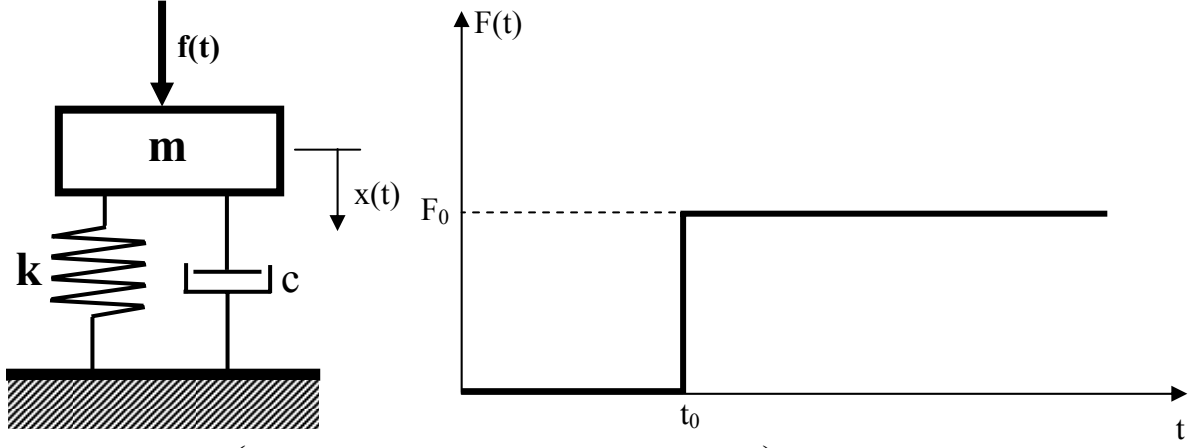
Kuvvet etki ederken ve kuvvet kalktığı andaki $x(t)$ ifadesinin en büyük değerleri aşağıdaki gibi grafik haline getirilir ise



Şekilden de görüldüğü gibi tek serbestlik dereceli sistemin en büyük yer değiştirme genliği

$$\frac{t_0}{T_n} \approx 0.75 \text{ oranında } \left(\frac{x(t)}{\delta_{st}} \right)_{\max} \approx 1.75 \text{ olarak elde edilmektedir.}$$

Darbe süresinin yapının doğal periyoduna oranı değiştirilerek yer değiştirme genlikleri kontrol edilebilir.

TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEM BASAMAK FORMLU GİRDİ CEVABI**Örnek 1:****MATLAB İLE:**

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \theta] \right) \quad t \geq t_0, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

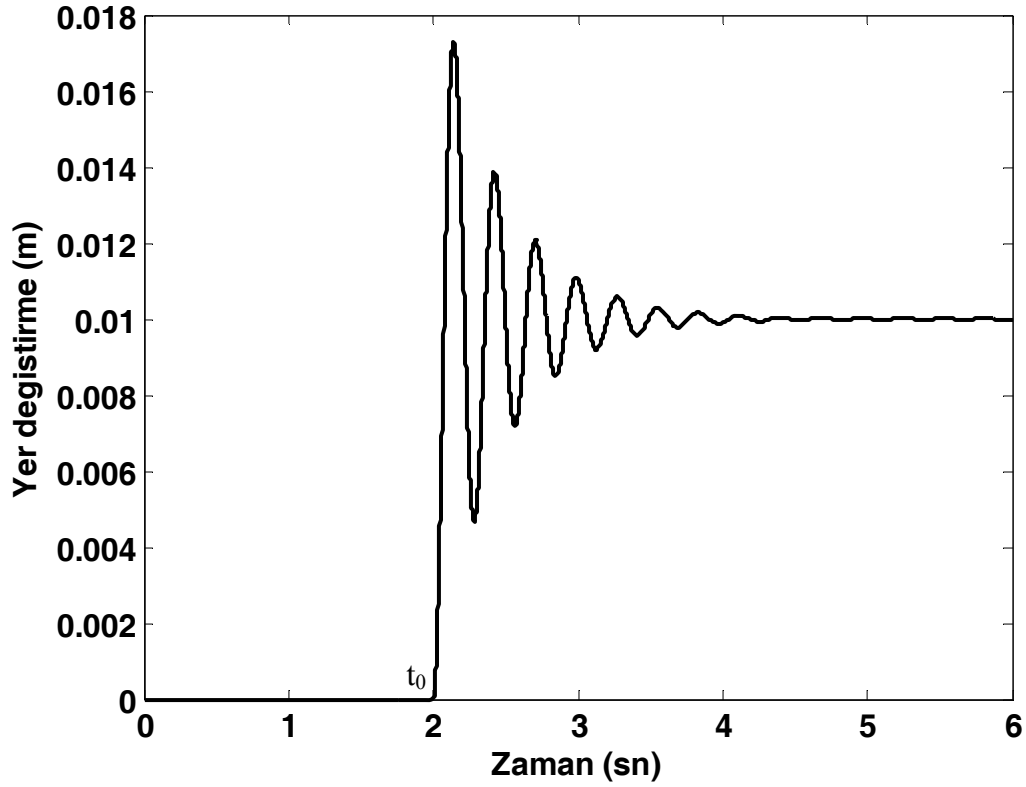
Matlab ile Çözüm:

```

clc;clear
F0=100;
t0=2;
m=20;
k=10000;
ksi=0.1;
c=ksi*2*sqrt(k*m);
k1=sqrt(1-ksi^2);
teta=atan(ksi/k1);
wn=sqrt(k/m);
wd=wn*k1;
dt=0.001;
tson=6;
t=0:dt:tson;
xt=((F0/k)*(1-1/k1*exp(-ksi*wn*(t-t0)).*cos(wd*(t-t0)-teta))).*(t>=t0);
plot(t,xt)
xlabel('Zaman (sn)')
ylabel('Yer degistirme (m)')

```

t<t0 için FALSE yani xt=0 olmasını sağlar
t>=t0 için TRUE yani xt nin formül
sonucundaki değeri almasını sağlar



ANSYS ile Çözüm:

```
/title, "1-DOF step girdi cevabı"
```

```
/prep7
```

```
et,1,mass21
```

```
et,2,combin14
```

```
m=20
```

```
k=10000
```

```
ksi=0.1
```

```
c=ksi*2*sqrt(k*m)
```

```
F0=100
```

```
r,1,0,m
```

```
r,2,k,c
```

```
n,1,0,0,0
```

```
n,2,0,1,0
```

```
type,1
```

```
real,1
```

```
e,2
```

```
type,2
```

```
real,2
```

```
e,1,2
```

```
eplot
```

```
dt=0.01 !zaman artımı
```

```
tson=6 ! Analiz için son süre
```

```
d,all,ux,0
```

```
d,all,uz,0
```

```
d,1,uy,0
```

```
/solu
```

```
antype,trans
```

```
outres,all,all
```

```
kbc,0
```

```
deltim,dt
```

```
t0=2
```

```
!Kuvvet uygulanıyor
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,t0
```

```
solve
```

```
f,2,fy,F0
```

```
time,t0+dt
```

```
solve
```

```
f,2,fy,F0
```

```
time,tson
```

```
solve
```

```
!Çözüm tamamlandı
```

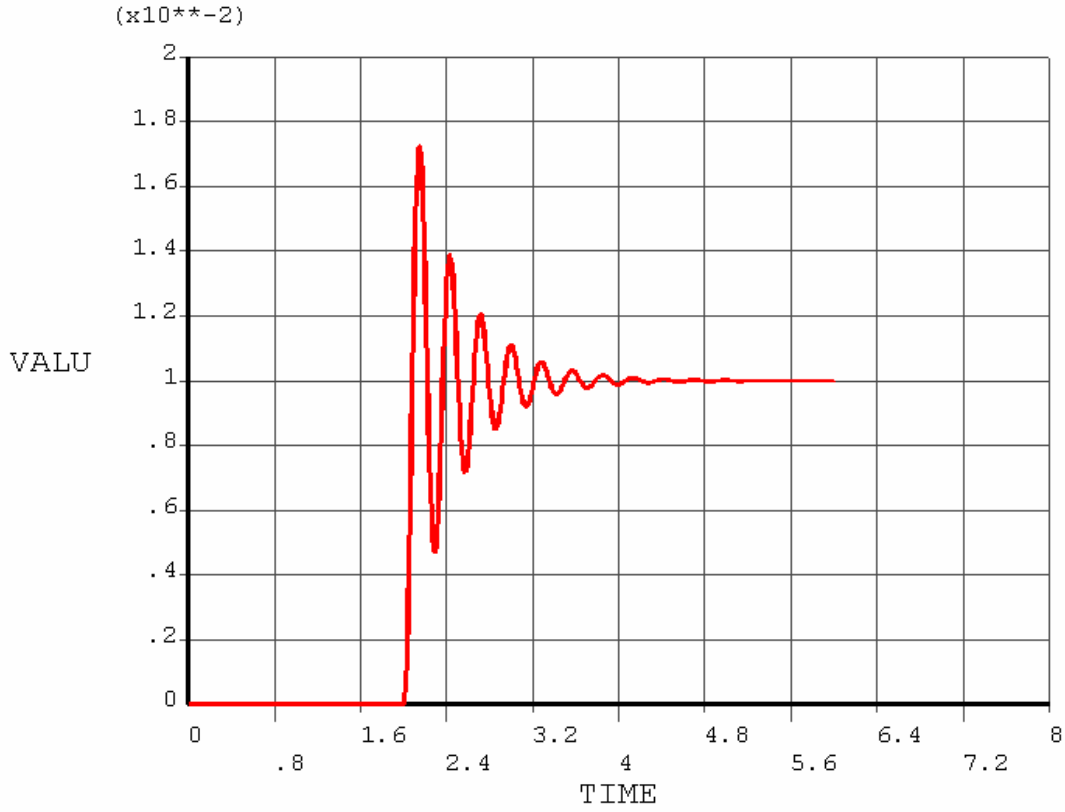
```
finish
```

```
/post26
```

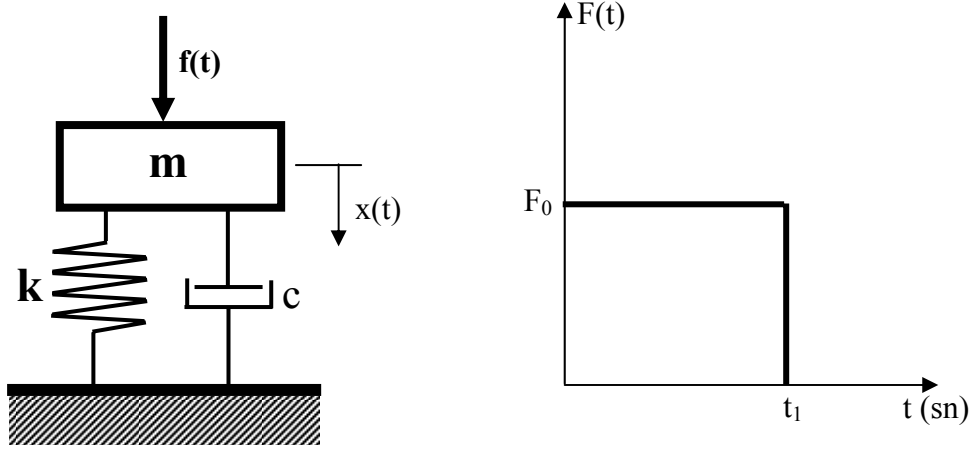
```
nsol,2,2,uy
```

```
plvar,2
```

Farklı kuvvetler için değişecek satırlar



Örnek 2:



$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos[\omega_d t - \theta] \right) + \frac{-F_0}{k} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] \right)$$

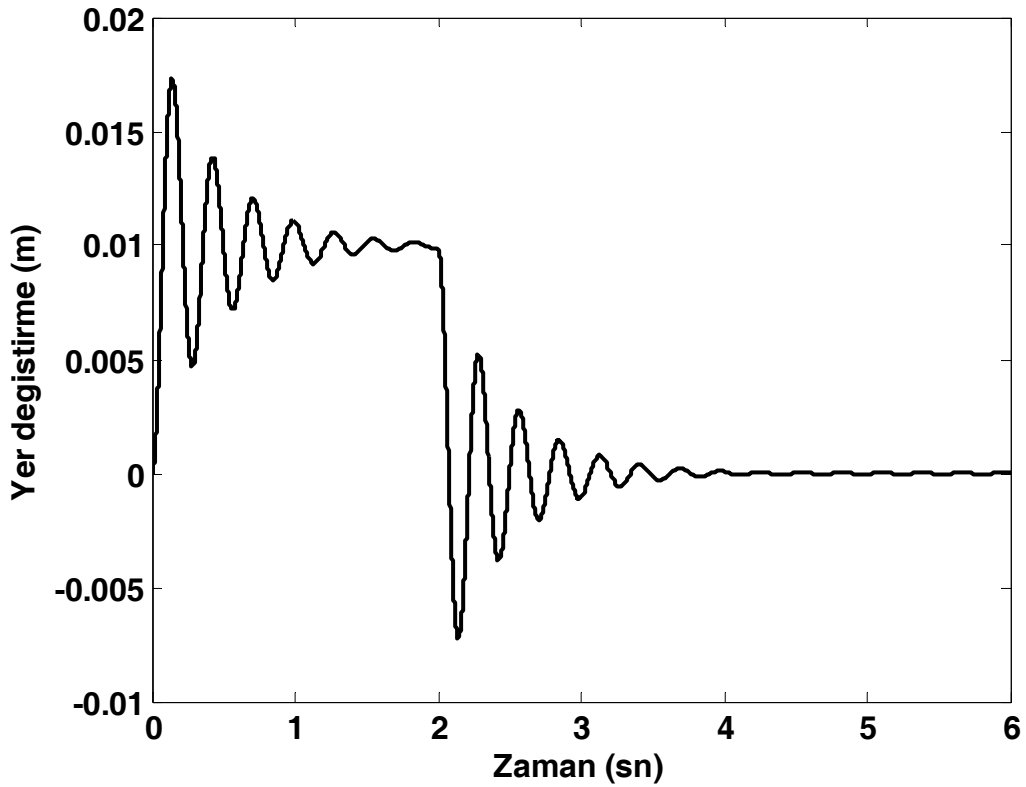
$$\theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

MATLAB İLE:

```

clc;clear
F0=100;
t1=2;
m=20;
k=10000;
ksi=0.1;
c=ksi*2*sqrt(k*m);
k1=sqrt(1-ksi^2);
teta=atan(ksi/k1);
wn=sqrt(k/m);
wd=wn*k1;
dt=0.001;
tson=6;
t=0:dt:tson;
xt1=F0/k*(1-1/k1*exp(-ksi*wn*t).*cos(wd*t-teta))
xt2=(-F0/k*(1-1/k1*exp(-ksi*wn*(t-t1)).*cos(wd*(t-t1)-teta))).*(t>=t1);
xt=xt1+xt2
plot(t,xt)
xlabel('Zaman (sn)')
ylabel('Yer degistirme (m)')

```



ANSYS İLE:

```

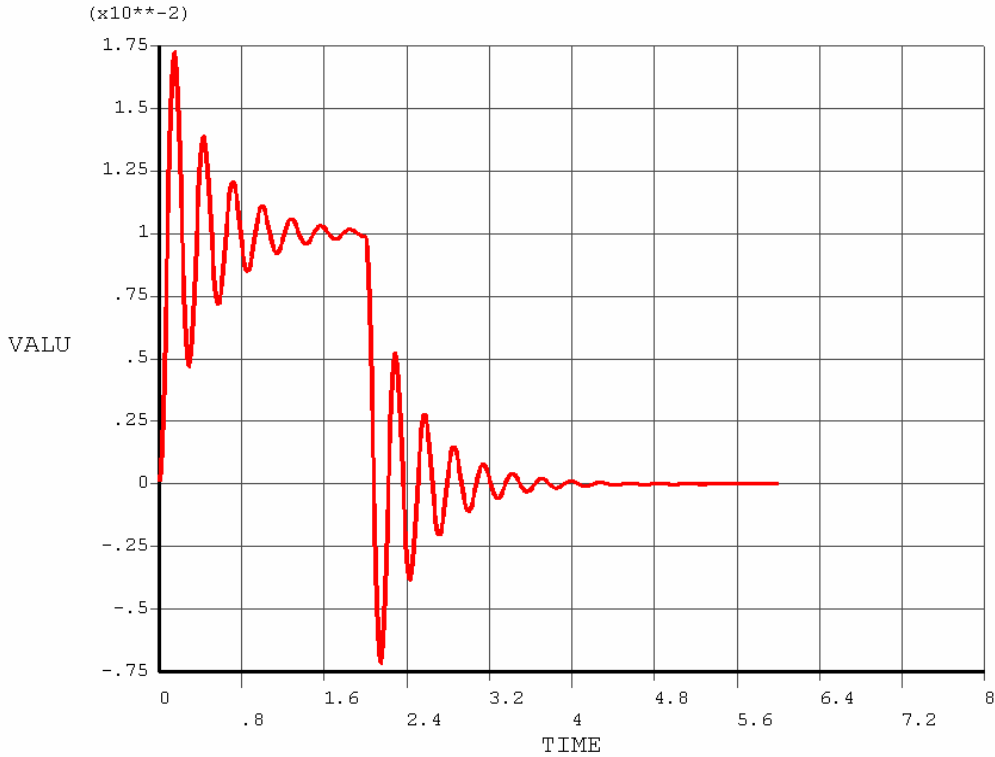
/title,"1-DOF step girdi cevabı"
/prep7
et,1,mass21
et,2,combin14
m=20
k=10000
ksi=0.1
c=ksi*2*sqrt(k*m)
F0=100
r,1,0,m
r,2,k,c
n,1,0,0,0
n,2,0,1,0
type,1
real,1
e,2
type,2
real,2
e,1,2
eplot
dt=0.01 !zaman artımı
tson=6 ! Analiz için son süre
d,all,ux,0
d,all,uz,0
d,1,uy,0
/solu

```

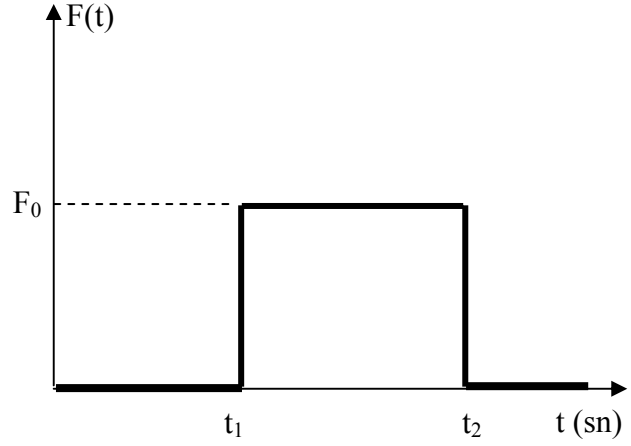
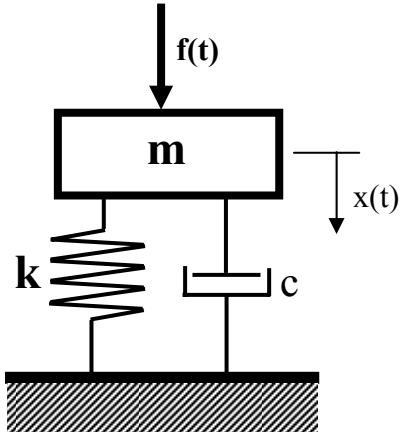
```

antype,trans
outres,all,all
kbc,0
deltim,dt
t1=2
!Kuvvet uygulanıyor
f,2,fy,F0
time,dt
solve
f,2,fy,F0
time,t1
solve
f,2,fy,0
time,t1+dt
solve
f,2,fy,0
time,tson
solve
!Çözüm tamamlandı
finish
/post26
nsol,2,2,uy
plvar,2

```



Örnek:



ANSYS İLE:

```
/title,"1-DOF step girdi cevabı"
```

```
/prep7
```

```
et,1,mass21
```

```
et,2,combin14
```

```
m=20
```

```
k=10000
```

```
ksi=0.1
```

```
c=ksi*2*sqrt(k*m)
```

```
F0=100
```

```
r,1,0,m
```

```
r,2,k,c
```

```
n,1,0,0,0
```

```
n,2,0,1,0
```

```
type,1
```

```
real,1
```

```
e,2
```

```
type,2
```

```
real,2
```

```
e,1,2
```

```
eplot
```

```
dt=0.01 !zaman artımı
```

```
tson=6 ! Analiz için son süre
```

```
d,all,ux,0
```

```
d,all,uz,0
```

```
d,1,uy,0
```

```
/solu
```

```
antype,trans
```

```
outres,all,all
```

```
kbc,0
```

```
deltim,dt
```

```
t1=1
```

```
t2=3
```

```
!Kuvvet uygulanıyor
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,t1
```

```
solve
```

```
f,2,fy,F0
```

```
time,t1+dt
```

```
solve
```

```
f,2,fy,F0
```

```
time,t2
```

```
solve
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,t2+dt
```

```
solve
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,tson
```

```
solve
```

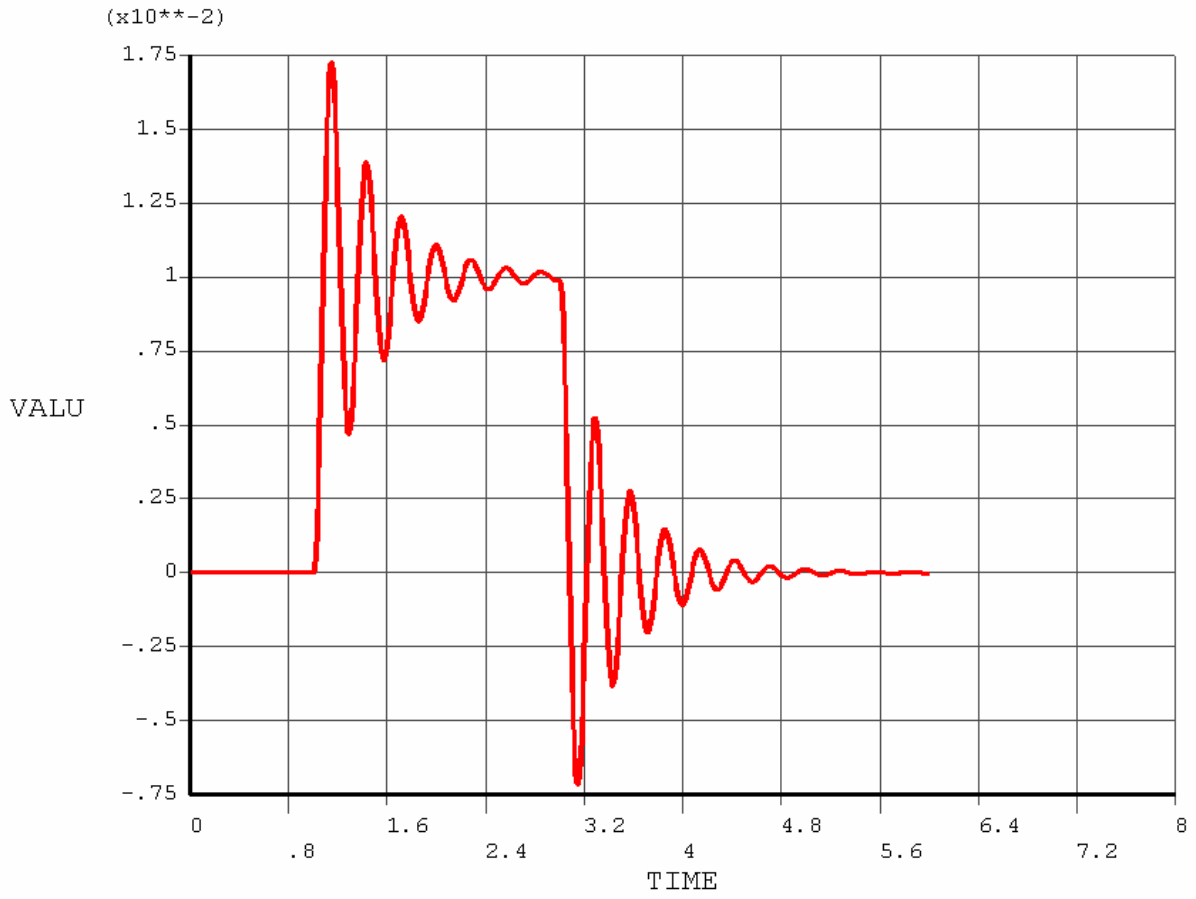
```
!Çözüm tamamlandı
```

```
finish
```

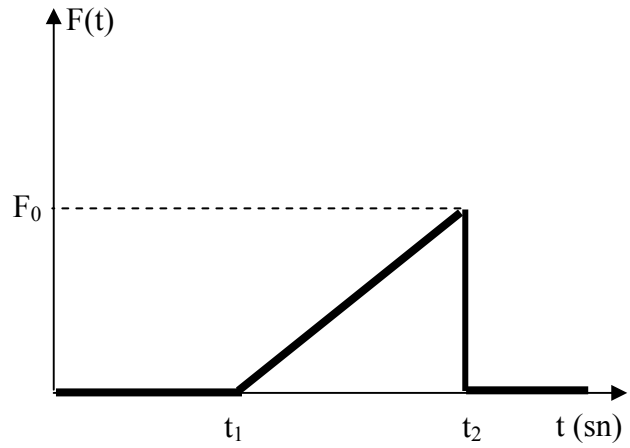
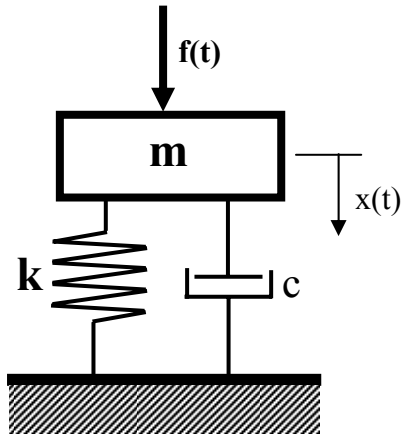
```
/post26
```

```
nsol,2,2,uy
```

```
plvar,2
```



Örnek:



```
/title,"1-DOF step girdi cevabı"
```

```
/prep7
```

```
et,1,mass21
```

```
et,2,combin14
```

```
m=20
```

```
k=10000
```

```
ksi=0.1
```

```
c=ksi*2*sqrt(k*m)
```

```
F0=100
```

```
r,1,0,m
```

```
r,2,k,c
```

```
n,1,0,0,0
```

```
n,2,0,1,0
```

```
type,1
```

```
real,1
```

```
e,2
```

```
type,2
```

```
real,2
```

```
e,1,2
```

```
eplot
```

```
dt=0.01 !zaman artımı
```

```
tson=6 ! Analiz için son süre
```

```
d,all,ux,0
```

```
d,all,uz,0
```

```
d,1,uy,0
```

```
/solu
```

```
antype,trans
```

```
outres,all,all
```

```
kbc,0
```

```
deltim,dt
```

```
t1=1
```

```
t2=3
```

```
!Kuvvet uygulanıyor
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,t1
```

```
solve
```

```
f,2,fy,F0
```

```
time,t2
```

```
solve
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,t2+dt
```

```
solve
```

```
f,2,fy,0
```

```
time,tson
```

```
solve
```

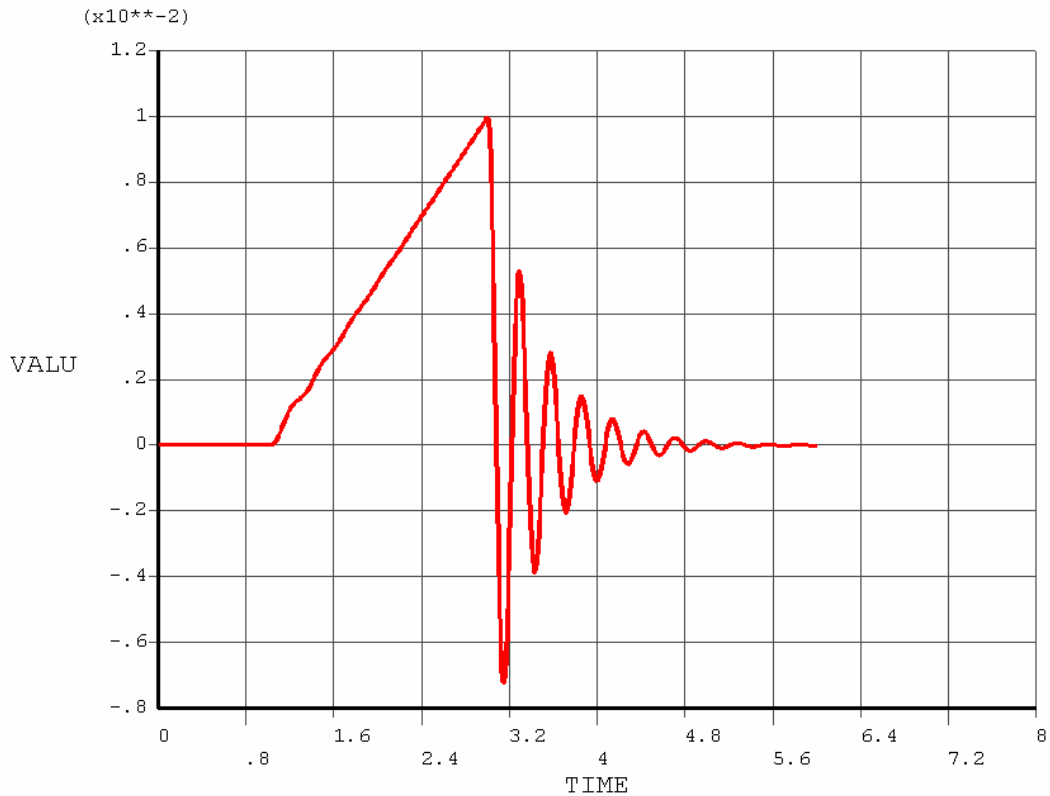
```
!Çözüm tamamlandı
```

```
finish
```

```
/post26
```

```
nsol,2,2,uy
```

```
plvar,2
```



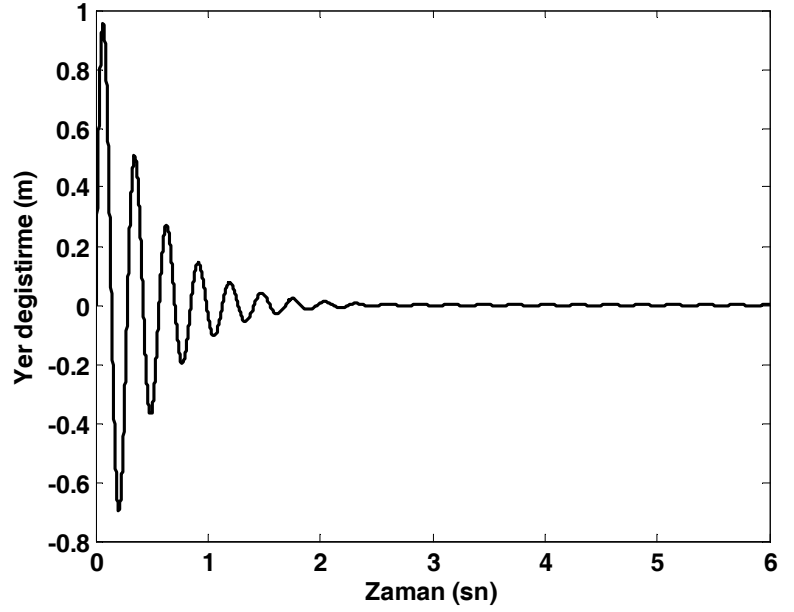
BİRİM IMPULS GİRDİ CEVABI

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

```

clc;clear
F0=1;
t1=2;
m=20;
k=10000;
ksi=0.1;
c=ksi*2*sqrt(k*m);
k1=sqrt(1-ksi^2);
teta=atan(ksi/k1);
wn=sqrt(k/m);
wd=wn*k1;
dt=0.001;
tson=6;
t=0:dt:tson;
xt=(1/m*wd)*exp(-ksi*wn*t).*sin(wd*t);
plot(t,xt)
xlabel('Zaman (sn)')
ylabel('Yer degistirme (m)')

```

**ANSYS İLE**

```

/title,"1-DOF step girdi
/prep7
et,1,mass21
et,2,combin14
m=20
k=10000
ksi=0.1
c=ksi*2*sqrt(k*m)
F0=1
r,1,0,m
r,2,k,c
n,1,0,0,0
n,2,0,1,0
type,1
real,1
e,2
type,2
real,2
e,1,2

```

```

eplot
dt=0.01 !zaman artımı
tson=6 ! Analiz için son
süre

```

```

d,all,ux,0
d,all,uz,0
d,1,uy,0

```

```

/solu
antype,trans
outres,all,all
kbc,0
deltim,dt

```

```

!Kuvvet uygulanıyor
f,2,fy,0

```

```

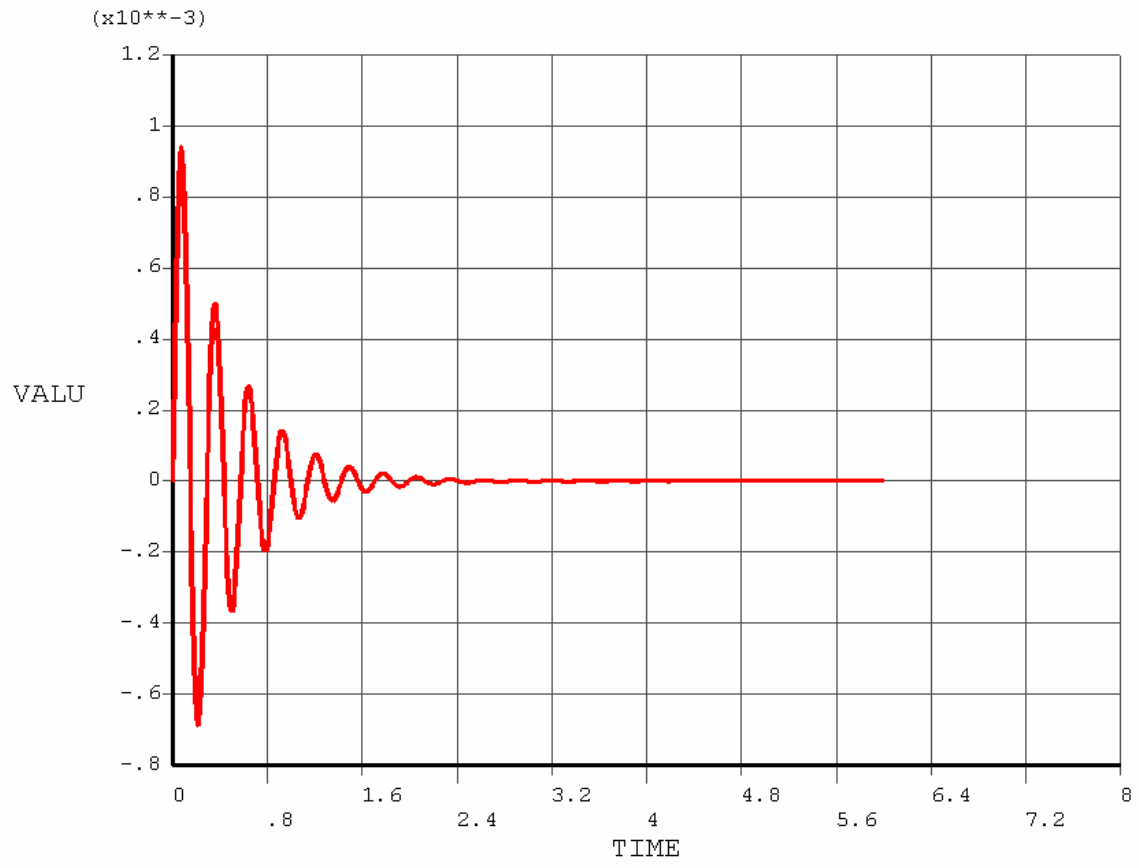
time,dt/100
solve
f,2,fy,F0/dt
time,dt/10
solve
f,2,fy,0
time,dt
solve
f,2,fy,0
time,tson
solve
!Çözüm tamamlandı

```

```

finish
/post26
nsol,2,2,uy
plvar,2

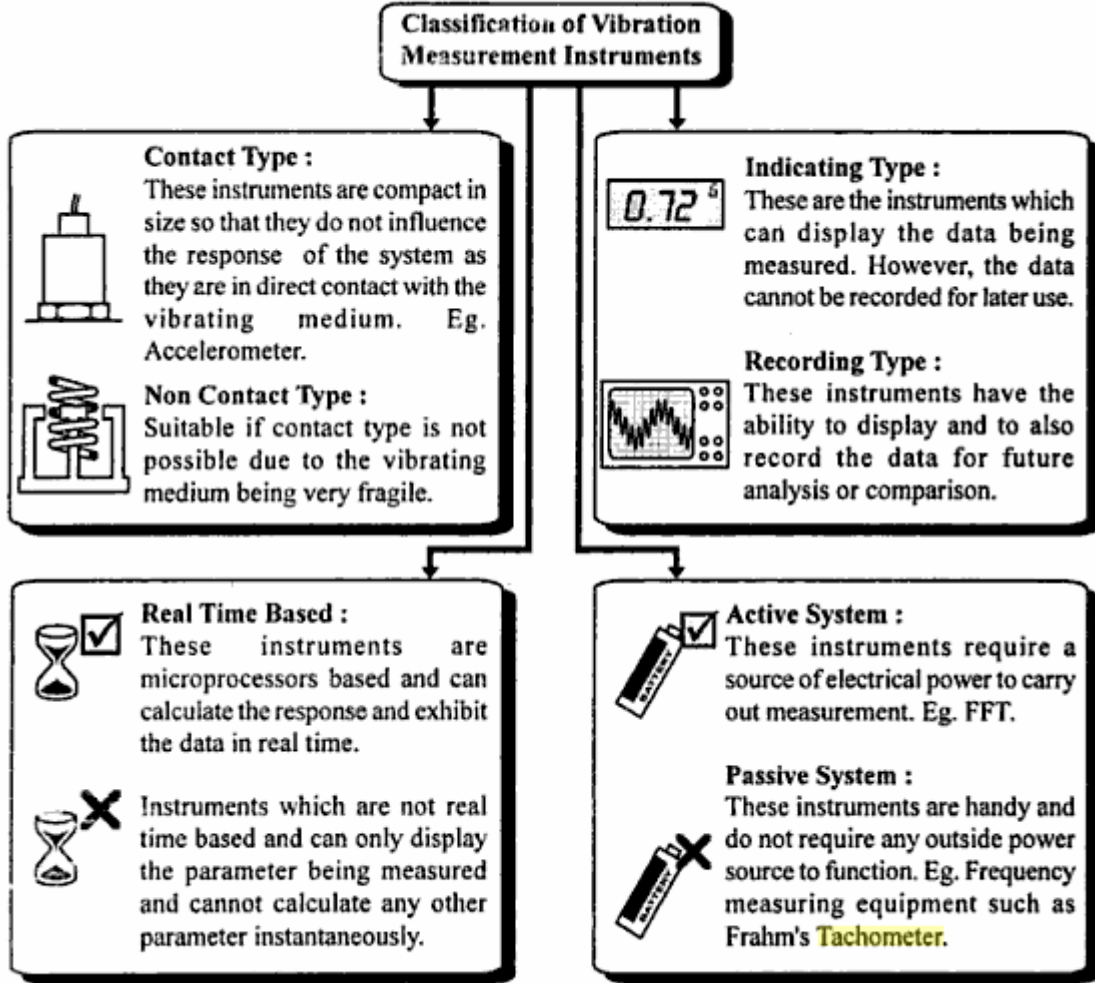
```



MEKANİK TİTREŞİMLER

TİTREŞİM ÖLÇÜMÜ:

Titreşim ölçümü oldukça kapsamlı bir konudur ve mekanik, elektrik ve elektronik bilgisi içeriklidir. Titreşim ölçümlerinde titreşim genliği (yer değiştirme-displacement, hız-velocity ve ivme-acceleration) ile titreşim frekansı bilgilerine ulaşmak temel amaçtır. Aşağıda titreşim ölçüm sistemleri ile ilgili genel bir sınıflandırma yapılmıştır (Farazdak Haideri, Dynamics of Machinery, 2007)



Classification of Vibration Measurement Instruments
(Dynamics of Machinery, Farazdak Haideri, 2007)

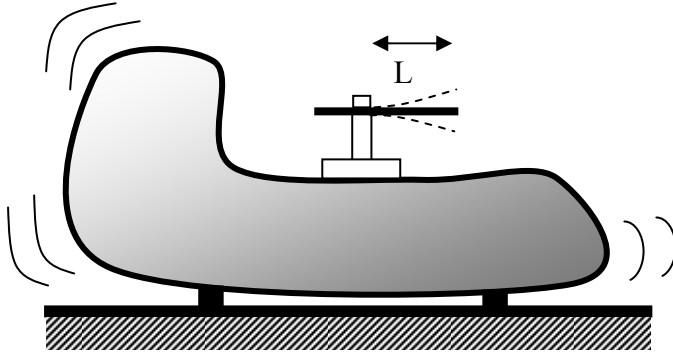
Titreşim frekansı Ölçümü:

En temel frekans ölçüm sistemi boyu ayarlanabilir ankastre bir kiriştir. Ankastre bir kiriş için birinci doğal frekans ifadesi

$$\omega_n = 3.53 \sqrt{\frac{EI}{m_{kiriş} L^3}} \text{ şeklindedir. (Sürekli sistem yaklaşımı ile elde edilmiş ifade)}$$

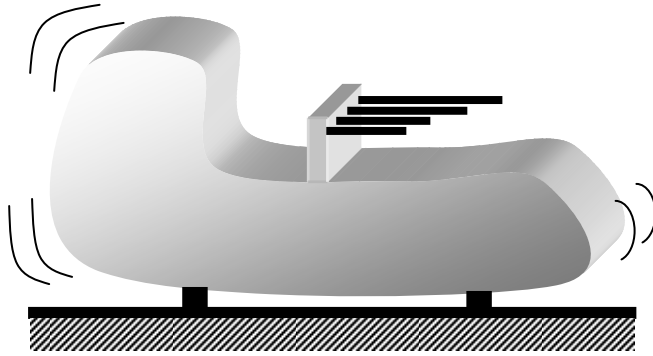
Kaynaklar: *Theory of Vibrations*-W.T.Thomson, *Elements of Vibration Analysis*-L. Meirovitch, *Vibrations of Continuous Systems*-S. Rao, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*-S.G. Kelly, *Vibration Problems in Engineering*-W.Weaver, S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Engineering Vibrations*-D.J. Inman, *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği*-Yücel Ercan, *Dynamics and Vibration*-M.A.Wahab, Farazdak Haideri, *Dynamics of Machinery*.

Boyu ayarlanabilir ankastre kiriş titreşim frekansı ölçülecek sistem üzerine monte edilir. Ankastre kirişin rezonans'a geldiği kiriş boyu deneme ile tespit edilir ve bu boy için yukarıdaki formül kullanılarak hesaplanan frekans titreşen sistemin titreşim frekansıdır.

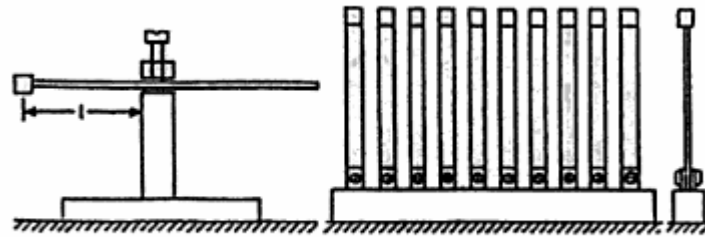


**FULLARTON
TAKOMETRESİ**

Titreşim frekansını ölçmek için kullanılmış olan diğer bir sistem de yukarıdaki sistem ile aynı prensibe dayanmaktadır. Bu sistemde farklı boylardaki bir dizi ankastre kiriş mevcuttur. Bu sistemin monte edildiği titreşen cismin titreşim frekansı hangi kirişin doğal frekansına eşit veya yakın ise bu kirişin titreşim genlikleri diğerlerine nazaran yüksek seviyelere ulaşacaktır. Bu durum gözlenerek titreşim frekansı belirlenebilir. Bu tip frekans ölçüm sistemlerine FRAHM Takometresi adı verilir.



**FRAHM
TAKOMETRESİ**



(a) Fullarton Tachometer

(b) Frahm Tachometer

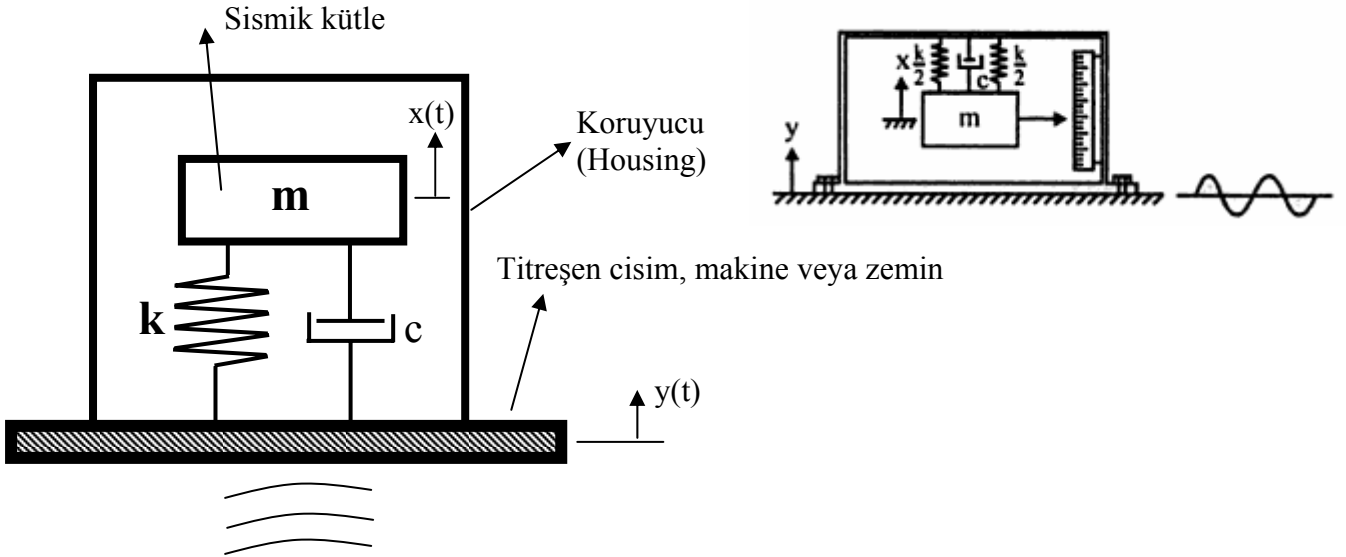
(NSV, Kameswara Rao, Mechanical Vibrations of Elastic Systems)

TİTREŞİM ÖLÇÜM ARAÇLARI

SİSMİK ARAÇLAR (SEISMIC INSTRUMENTS)

Sismometre (Seismometer):

Titreşen sistemlerdeki titreşim hareketinin zamana bağlı değişimi sismik cihazlar kullanılarak ölçülebilir ve kayıt edilebilir. Bir sismik algılayıcının (sensörün) şematik resmi aşağıda verilmiştir.



Sismik cihazın bağlandığı cisim hareket ettikçe sismik kütle de hareket eder.

Titreşen cismin titreşim hareketinin tek frekanslı harmonik bir formda olduğunu düşünür isek,

$$y(t) = Y \sin \omega t, \quad \dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t, \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \sin \omega t$$

Sismik cihaz (enstrüman) sismik kütle ile zemin hareketi arasındaki farkı ölçer. Bu farkı $z = x - y$ şeklinde ifade eder isek $\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}$ ve $\ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$ dir.

Sismik kütleyle ait hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y} \text{ yerine konur ise}$$

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = -m \ddot{y} = m \omega^2 Y \sin \omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{c}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \omega^2 Y \sin \omega t$$

$$\ddot{z} + 2\zeta \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = \omega^2 Y \sin \omega t$$

Bağıl harekete göre yazılan yukarıdaki hareket denklemi zorlama genliğinin zorlama frekansının karesi ile orantılı olduğu harmonik zorlama durumuna karşılık gelmektedir ve cevap aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \varphi)$$

Burada Z bağıl titreşim genliği ve faz açısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} Y, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

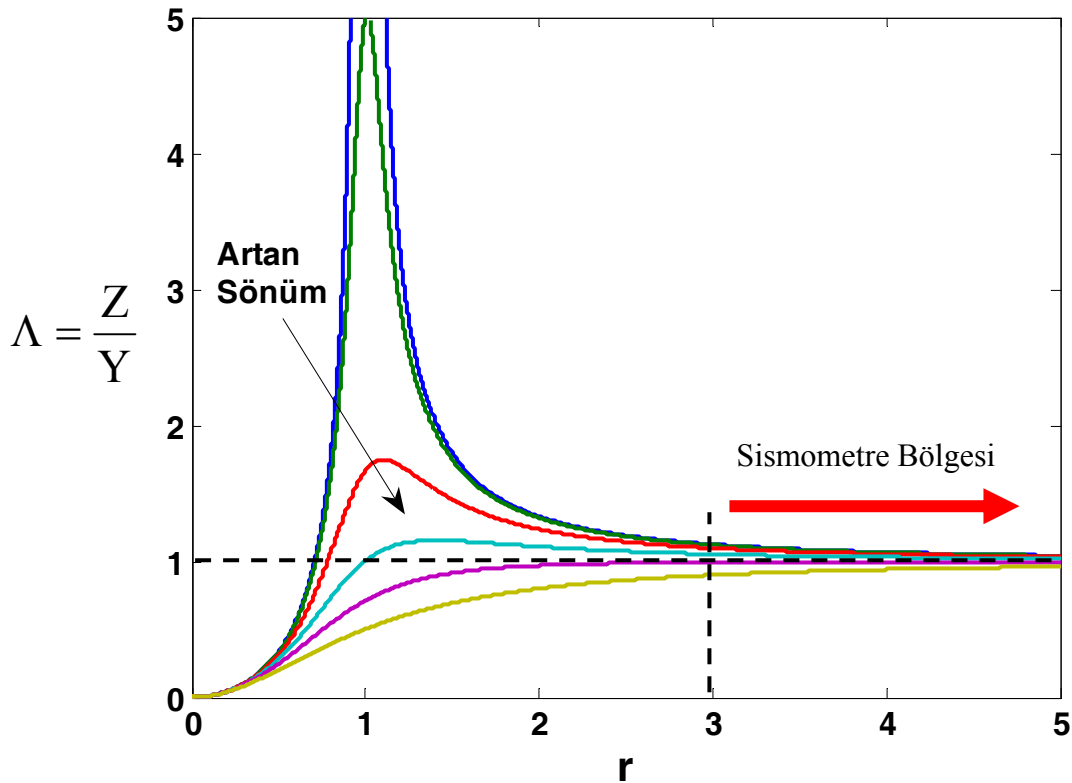
Λ

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (\text{Büyütme faktörü})$$

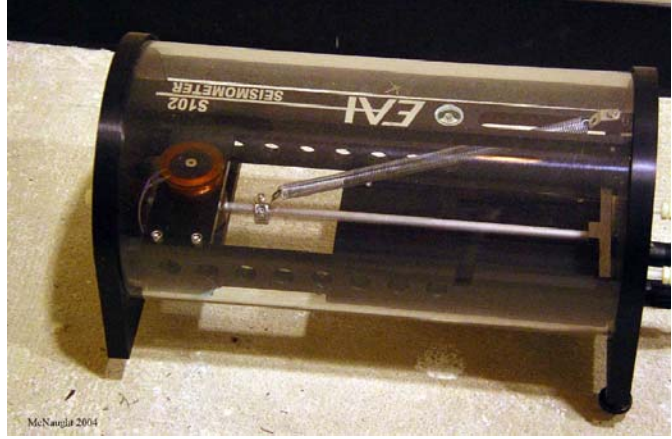
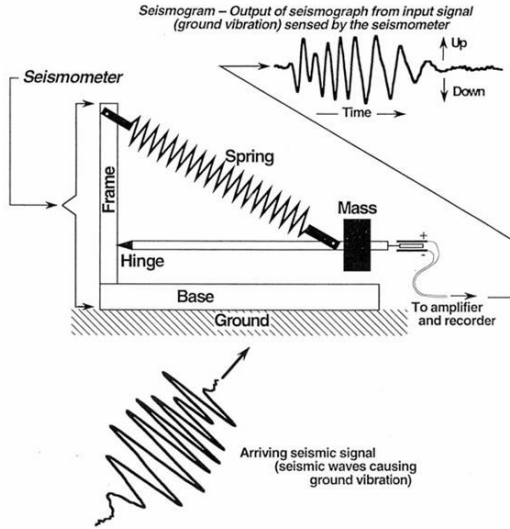
$$\Lambda = r^2 H, \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (\omega\text{-zorlama frekansı, } \omega_n\text{-Sismik kütleli doğa} \text{ frekansı})$$

$$Z = \Lambda Y$$

Frekans oranına bağlı olarak Λ 'nın değişimini tekrar hatırla isek



Görüldüğü gibi $r > 3$ frekans oranları için sönüm oranından bağımsız olarak bağıl yer değiştirme genliği ile zemin (titreşen cisim) yer değiştirme genliği oranı yaklaşık 1 olmaktadır (belli bir hata payı ile). Bu durumda zemin yer değiştirmesi ile sismik kütle yer değiştirmesi arasında sadece bir faz farkı vardır ve bu faz farkı genel olarak tek frekanslı titreşimler için önemli değildir. Titreşim ölçüm cihazları bağıl hareket ile orantılı sinyal çıkışı sağlamaktadırlar. Dolayısı ile büyük frekans oranları için ($r > 3$) bağıl yer değiştirme genliği aslında zeminin (titreşen cisim) titreşim genliği olmaktadır. Büyük frekans oranları r gerektiren sismik cihazlara SİSMOMETRE (SEISMOMETER) veya TİTREŞİMMETRE (VİBROMETER) adı verilir.



Normal çalışma frekansları için büyük frekans oranı, sismik kütlelerin düşük doğal frekanslara sahip olması ile elde edilebilir. Bu durum sismik kütlelerin büyük, yayın ise küçük direngenliğe sahip olması ile sağlanabilir. Büyük kütle gereksinimi dolayısı ile sismometreler büyük hacimli cihazlardır ve dolayısı ile makine titreşimlerinin ölçümleri için uygun olmayıp, zemin titreşimlerinin belirlenmesi için (deprem gibi) uygundur.



Sismograf görüntüsü.

Sismometre ölçümlerindeki hata şu şekilde ifade edilebilir.

$$E = \left(\frac{Y_{\text{gerçek}} - Y_{\text{ölçülen}}}{Y_{\text{gerçek}}} \right) \times 100$$

$$E = \left(\frac{Y - Z}{Y} \right) \times 100$$

$$E = |1 - \Lambda| \times 100$$

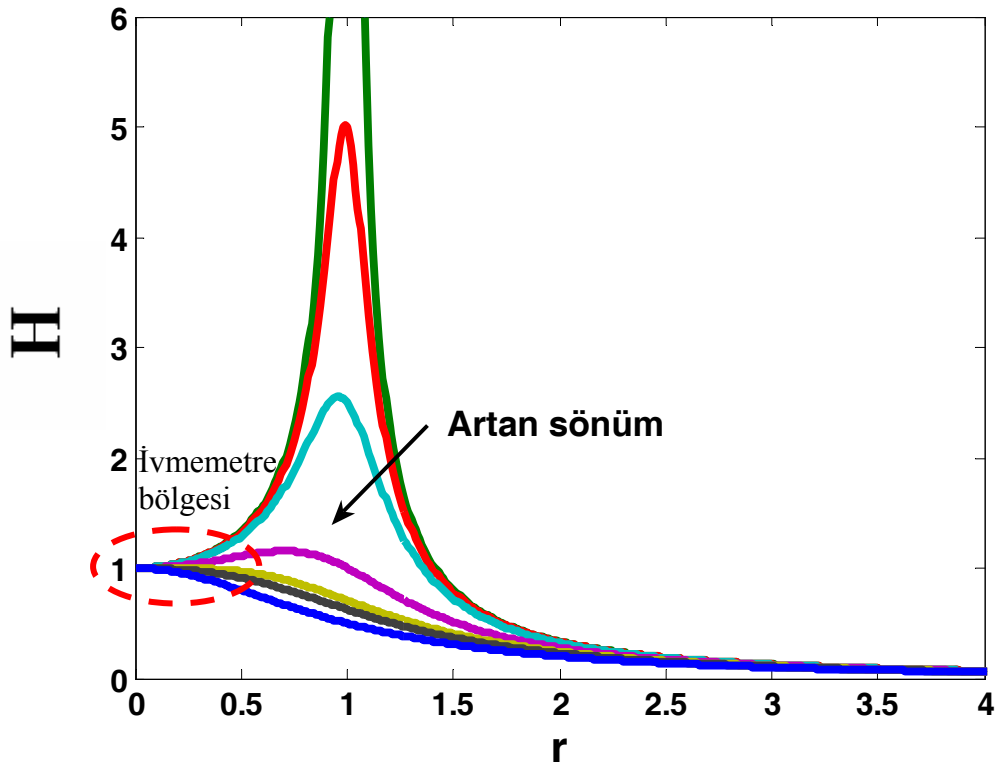
İvmemetre (Accelerometer):

Titreşen cismin ivmesinin ölçümü söz konusu ise şu yöntem izlenebilir.

$$Z = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 H Y \text{ idi. Buradan}$$

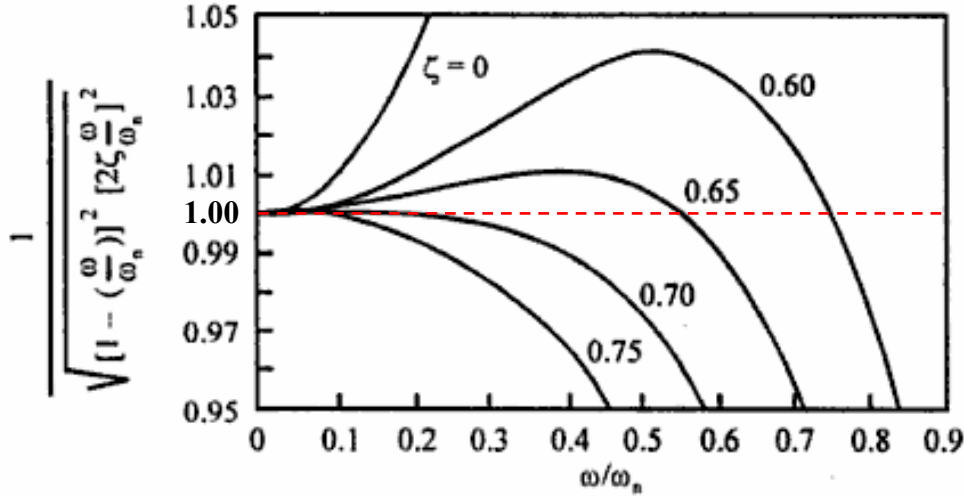
$$Z = \frac{\omega^2 Y}{\omega_n^2} H = \frac{\text{ölçülecek titreşimin genliği}}{\omega_n^2} \times H$$

Büyütme faktörü H'nin frekans oranına bağlı davranışı tekrar hatırlanır ise küçük frekans oranları için ($r \ll 1$) H değerinin yaklaşık 1 olduğu görülebilir.



Dolayısı ile küçük frekans oranları için $\omega_n^2 Z = \omega^2 Y = |\ddot{y}|$ geçerlidir. Dolayısı ile cihaz titreşim ivmesi ile ilişkili bir çıktı üretir ve bu tip cihazlara İVMEMETRE (ACCELEROMETER) adı

verilir. İvmemetrelerde küçük frekans oranlarını sağlamak için doğal frekansın büyük olması gereklidir. Bu da küçük sismik kütleler ve büyük yay direngenlikleri ile elde edilir. İvmemetrelerde kullanılan sismik kütlelerin küçük olması dolayısı ile titreşimi ölçülecek cisimlere monte edilmeleri kolay ve uygundur, dolayısı ile ivmemetreler titreşim ölçümlerinde tercih edilen ölçüm elemanlarıdır. İvmemetredeki ölçüm hatası H 'ın frekans ve sönüm oranına bağlı olarak değişimi incelenerek belirlenebilir.



Şekilden görüldüğü gibi $\zeta=0.7$ değeri için büyük bir frekans aralığında $H=1$ kabulü en az hata ile sağlanmaktadır. Benzer durum Sismometre için de geçerlidir ($r>3$). Bu nedenle sismometre ve ivmemetre tasarımları sönüm oranı 0.7 olacak şekilde gerçekleştirilir.

Örnek: Doğal frekansı 0.5 Hz olan sönümsüz bir sismometre için %2 hatadan daha düşük ölçüm yapılabilecek frekans alt sınırı nedir?

Sismometreler doğal frekanslarından büyük frekanslardaki titreşimleri ölçmek için tasarlanmıştır ($r>3$). Sönümsüz durum için

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{1-r^2}$$

$$\frac{Z}{Y} = -1.02 = \frac{r^2}{1-r^2} \rightarrow 1.02r^2 - r^2 = 1.02 \rightarrow r = \sqrt{\frac{1.02}{0.2}} = 7.13$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n} = 7.13 \rightarrow f = 0.5 \times 7.13 = 3.58 \text{ Hz.}$$

3.58 Hz'den büyük frekanslardaki titreşim ölçümleri için sismometre hatası %2'den küçük olacaktır.

Örnek: Doğal frekansı 15 Hz olan bir sismometrenin sönüm oranı $\zeta=0.5$ 'dir. Sismometrenin %3'den düşük hata ile ölçüm yapabileceği en düşük frekans nedir.

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$1.03 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2*0.5r)^2}} \rightarrow (1.03)^2 = \frac{r^4}{r^4 - r^2 + 1} \rightarrow 1.0609 = \frac{r^4}{r^4 - r^2 + 1}$$

$$1.0609r^4 - 1.0609r^2 + 1.0609 = r^4$$

$$0.0609r^4 - 1.0609r^2 + 1.0609 = 0$$

$p=r^2$ dönüşümü yapılır ve kökler bulunur ise

$r_1=4.0442$ ve $r_2=1.0320$ değerleri elde edilir. Sismometre için büyük r değeri frekans alt değerini verecektir.

Buradan %3 hata ile ölçüm alt frekans değeri $r = \frac{f}{f_n} = 4.0442 \rightarrow f=15*4.0442=60.663$ Hz olarak elde edilir.

Örnek:

20 Hz doğal frekansa ve 0.15 sönüm oranına sahip bir sismometre ile 100 Hz de titreşen bir sistem için ölçüm yapılmış ve 1.3 mm yer değiştirme genliği elde edilmiştir. Bu ölçümdeki ölçüm hatası nedir.

$$r = \frac{f}{f_n} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\frac{Z}{Y} = \Lambda = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{25}{\sqrt{(1-25)^2 + (2*0.15*5)^2}} = 1.0396$$

Ölçüm hatası

$$E = |1 - \Lambda| \times 100 = |1 - 1.0396| \times 100 = \%3.96 \text{ dir.}$$

MEKANİK TİTREŞİMLER

ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLER:

Gerçek uygulamalarda birçok mühendislik sistemi birden fazla serbestlik derecesi içermektedir. Çok serbestlik dereceli sistemlerin titreşim analizlerinde diferansiyel denklem takımları ve bunlara bağlı olarak oluşturulan matris formundaki denklemler söz konusudur. Bu denklemler birlikte veya uygun dönüşümler ile ayrı ayrı çözümlenerek mevcut genel koordinatlar için sistemin serbest titreşimlerinin ve belirli dış zorlamalara karşı zamana bağlı cevaplarının belirlenmesi mümkündür.

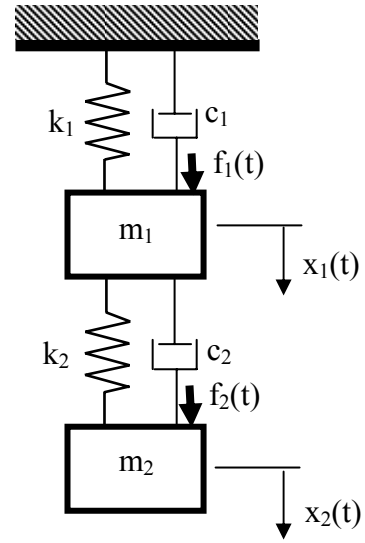
Örnek olarak aşağıdaki iki serbestlik dereceli öteleme sistemini ele alalım.

Örnek: Şekildeki iki serbestlik dereceli sistem için (x_1, x_2) için hareket denklemlerini elde edelim

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$\delta W = f_1 \delta x_1 + f_2 \delta x_2 - c_1 \dot{x}_1 \delta x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \delta (x_2 - x_1)$$



Lagrange denklemi x_1 genel koordinatı için uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_1}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = Q_{x_1}$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = f_1 - c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \quad (1)$$

Lagrange denklemi x_2 genel koordinatı için uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_1}{\partial \dot{x}_2} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} = Q_{x_2}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = f_2 - c_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = f_2 \quad (2)$$

Hareket denklemleri matris formunda yazılır ise

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Sistemin sönümsüz serbest titreşimlerine ait frekansları (doğal frekanslar) aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

Sönümsüz serbest titreşim denklemi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = X_1 e^{st}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{st}$$

$$\ddot{x}_1(t) = s^2 X_1 e^{st}$$

$$\ddot{x}_2(t) = s^2 X_2 e^{st}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} s^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} m_1 s^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[m_1 s^2 + (k_1 + k_2)](m_2 s^2 + k_2) - k_2^2 = 0$$

$$m_1 m_2 s^4 + [m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)] s^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (\text{karakteristik polinom})$$

4. dereceden polinomun kökleri sistemin doğal frekanslarını verir.

$$s_i^2 = -\omega_{n,i}^2$$

$$s_{1,2} = \mp \omega_{n1} i, \quad s_{3,4} = \mp \omega_{n2} i$$

$$\omega_{n1} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (k_2 m_2 + m_1 k_2 + k_1 m_2 - \overline{D})}}{m_1 m_2}$$

$$\omega_{n2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2m_1 m_2 (k_2 m_2 + m_1 k_2 + k_1 m_2 + \overline{D})}}{m_1 m_2}$$

$$\bar{D} = \sqrt{k_2^2 m_2^2 + 2k_2^2 m_1 m_2 + 2k_1 k_2 m_2^2 + m_1^2 k_2^2 - 2m_1 m_2 k_1 k_2 + k_1^2 m_2^2}$$

Karakteristik polinomun kökleri ile sistemin iki doğal frekansı elde edilir ve bu doğal frekans değerleri kullanılarak serbest titreşim hareketi sırasında X_1 ve X_2 yer değiştirmelerine ait oran şu şekilde elde edilir.

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[m_1 s^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2 X_2 = 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_2}{m_1 s^2 + (k_1 + k_2)}$$

veya ikinci denklemden

$$-k_2 X_1 + (m_2 s^2 + k_2)X_2 = 0$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{m_2 s^2 + k_2}{k_2}$$

elde edilir.

Sayısal Örnek:

Yukarıdaki problemde $m_1=20$ kg, $m_2=15$ kg, $k_1=100000$ N/m, $k_2=200000$ N/m alalım. Bu durum için sistemin doğal frekanslarını ve bu frekanslardaki titreşim biçimlerini elde edelim.

$$D=300s^4 + 85 \times 10^5 s^2 + 2 \times 10^{10}$$

$$s_{1,2} = \pm 50.89 i$$

$$s_{3,4} = \pm 160.45 i$$

$$\omega_{n1} = 50.89 \text{ rad/sn}, \omega_{n2} = 160.45 \text{ rad/sn}$$

$$f_{n1} = 8.098 \text{ Hz}, f_{n2} = 25.53 \text{ Hz}$$

Doğal titreşim genliklerini elde etmek için

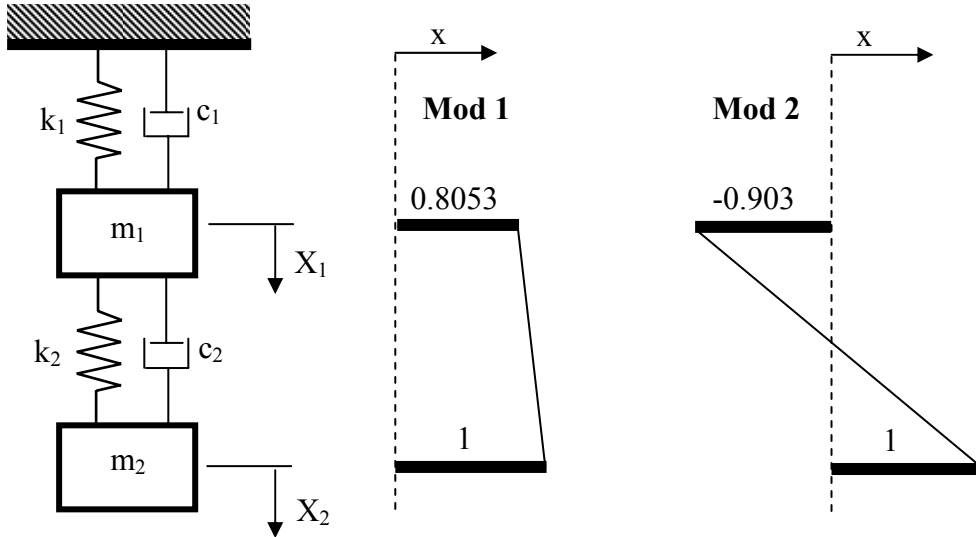
1. titreşim biçimi için $s^2 = -50.89^2 = -2589.8$ yerine konur ise

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_2}{m_1 s^2 + (k_1 + k_2)} = \frac{200000}{20 * (-2589.8) + (100000 + 200000)} = 0.8058$$

2. titreşim biçimi için $s^2 = -160.45^2 = -25744$ yerine konur ise

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_2}{m_1 s^2 + (k_1 + k_2)} = \frac{200000}{20 * (-25744) + (100000 + 200000)} = -0.903$$

X_2 yer değiştirme genliği için 1 değeri kabul edilir ise bu durumda 1. doğal titreşim modu için $X_1=0.8058$, ikinci titreşim modu için $X_1=-0.903$ olur. Bu durum aşağıda şekil olarak gösterilmiştir.

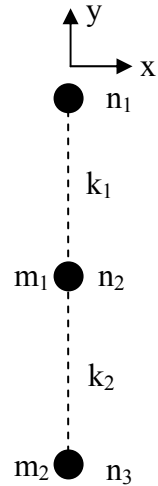


Titreşim şekillerinin hesaplanmasında ikinci denklem de kullanılabilir, aynı sonuçlar elde edilecektir.

Bu sistem için ANSYS ile model oluşturulur ve doğal frekanslar hesaplanır ise

```
/title,"İki Serbestlik Dereceli Sistem"
/prep7
et,1,mass21
et,2,combin14
m1=20
m2=15
k1=100000
k2=200000
r,1,0,m1
r,2,0,m2
r,3,k1
r,4,k2
n,1,0,0,0
n,2,0,-1,0
n,3,0,-2,0
type,1
real,1
```

```
e,2
real,2
e,3
type,2
real,3
e,1,2
real,4
e,2,3
eplot
/solu
antype,modal
modopt,lanb,2
d,all,ux,0
d,all,uz,0
d,1,uy,0
solve
```



*** FREQUENCIES FROM BLOCK LANCZOS ITERATION ***

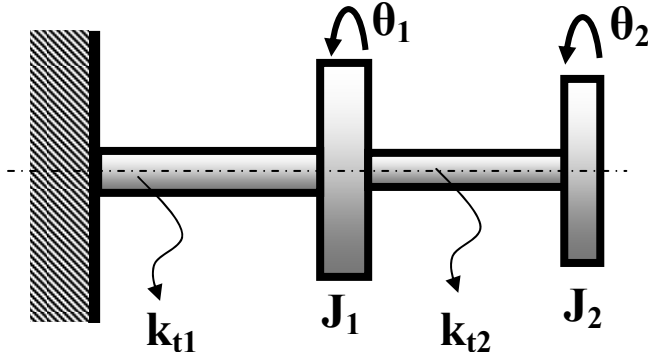
MODE FREQUENCY <HERTZ>

1 8.099141585478
2 25.53616304469

*** PROBLEM STATISTICS

ACTUAL NO. OF ACTIVE DEGREES OF FREEDOM = 2

Örnek: Şekilde verilen iki serbestlik dereceli mil disk sistemine ait doğal frekansları ve titreşim biçimlerini bulunuz.



$$J_1 = 4 \text{ kgm}^2$$

$$J_2 = 2 \text{ kgm}^2$$

$$k_{t1} = 2000 \text{ Nm/rad}$$

$$k_{t2} = 1000 \text{ Nm/rad}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_{t1} \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_{t2} (\theta_2 - \theta_1)^2$$

$$\delta W = 0$$

θ_1 için Lagrange denklemi uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1}$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2}) \theta_1 - k_{t2} \theta_2 = 0$$

θ_2 için Lagrange denklemi uygulanır ise

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_1}{\partial \dot{\theta}_2} \right) + \frac{\partial E_2}{\partial \theta_2} = Q_{\theta_2}$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{t2} \theta_1 + k_{t2} \theta_2 = 0$$

$$4 \ddot{\theta}_1 + 3000 \theta_1 - 1000 \theta_2 = 0$$

$$2 \ddot{\theta}_2 - 1000 \theta_1 + 1000 \theta_2 = 0, \quad \theta_1(t) = \theta_1 e^{st}, \quad \theta_2(t) = \theta_2 e^{st}, \quad \ddot{\theta}_1(t) = s^2 \theta_1 e^{st}, \quad \ddot{\theta}_2(t) = s^2 \theta_2 e^{st}$$

$$4s^2 \theta_1 + 3000 \theta_1 - 1000 \theta_2 = 0 \rightarrow (4s^2 + 3000) \theta_1 - 1000 \theta_2 = 0$$

$$2s^2 \theta_2 - 1000 \theta_1 + 1000 \theta_2 = 0 \rightarrow -1000 \theta_1 + (2s^2 + 1000) \theta_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4s^2 + 3000 & -1000 \\ -1000 & 2s^2 + 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$s = i\omega \text{ yazılır ise } s^2 = -\omega^2$$

$$\begin{bmatrix} -4\omega^2 + 3000 & -1000 \\ -1000 & -2\omega^2 + 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \neq 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -4\omega^2 + 3000 & -1000 \\ -1000 & -2\omega^2 + 1000 \end{bmatrix} = 0$$

$$8\omega^4 - 10000\omega^2 + 2000000 = 0$$

$$\omega^2 = z \text{ olsun.}$$

$$8z^2 - 10000z + 2000000 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10000^2 - 4 * 8 * 2000000 = 36000000 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 6000$$

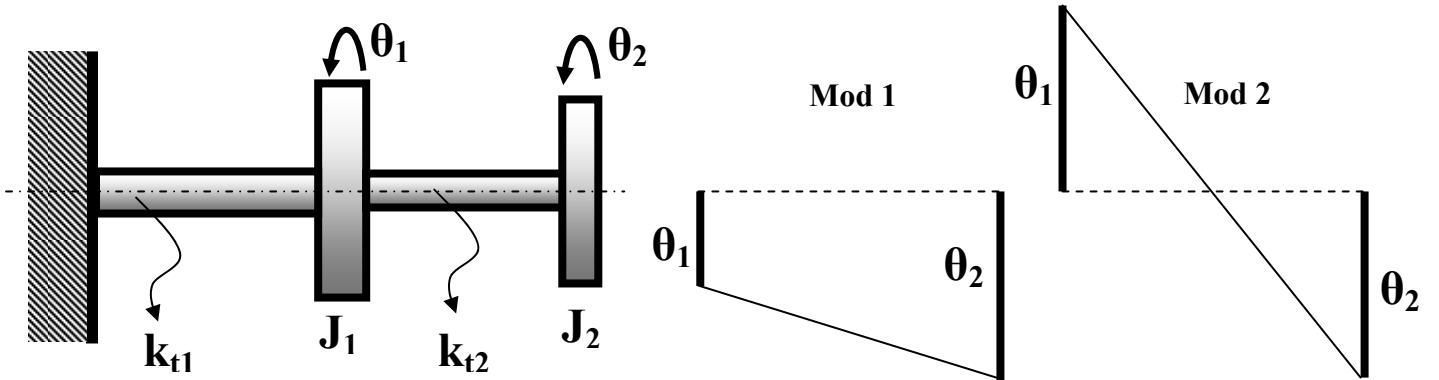
$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10000 + 6000}{16} = 1000 \\ z_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10000 - 6000}{16} = 250 \end{aligned} \right\} \text{Küçük frekans 1. doğal frekansıdır.}$$

$$\omega_1^2 = 250 \rightarrow \omega_1 = 15.81 \text{ rad/sn}, \quad \omega_2^2 = 1000 \rightarrow \omega_2 = 31.62 \text{ rad/sn}$$

Titreşim biçimlerini bulmak için 1. denklem kullanılır ise

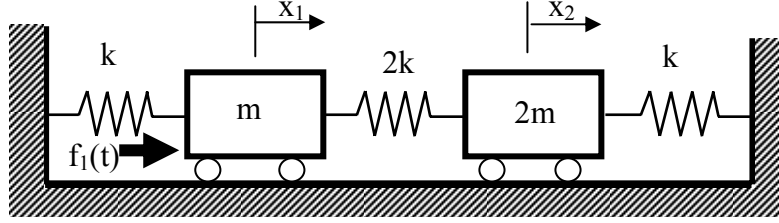
$$(3000 - 4\omega_1^2)\theta_1 - 1000\theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1000}{3000 - 4\omega_1^2} = \frac{1000}{3000 - 4 * 250} = 0.5$$

$$(3000 - 4\omega_2^2)\theta_1 - 1000\theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1000}{3000 - 4\omega_2^2} = \frac{1000}{3000 - 4 * 1000} = -1$$



Harmonik Zorlama Cevabı:

Aşağıda verilen iki serbestlik dereceli sistemde, belirtilen harmonik zorlama için m_1 ve m_2 kütlelerine ait cevap genlikleri aşağıdaki şekilde bulunabilir.



$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = f_1(t)$$

$$2m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 3kx_2 = 0$$

$f_1(t) = F_1 \cos \omega t$ formunda ise $x_1(t) = X_1 \cos \omega t$ ve $x_2(t) = X_2 \cos \omega t$ olarak alınabilir.

Dolayısı ise $\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1 \cos \omega t$ ve $\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2 \cos \omega t$

$$(-m\omega^2 X_1 + 3kX_1 - 2kX_2) \cos \omega t = F_1 \cos \omega t$$

$$(-2m\omega^2 X_2 - 2kX_1 + 3kX_2) \cos \omega t = 0$$

$m=5 \text{ kg}$, $k=2500 \text{ N/m}$ ve $f_1(t) = 100 \cos 50t$ için X_1 ve X_2 genlikleri

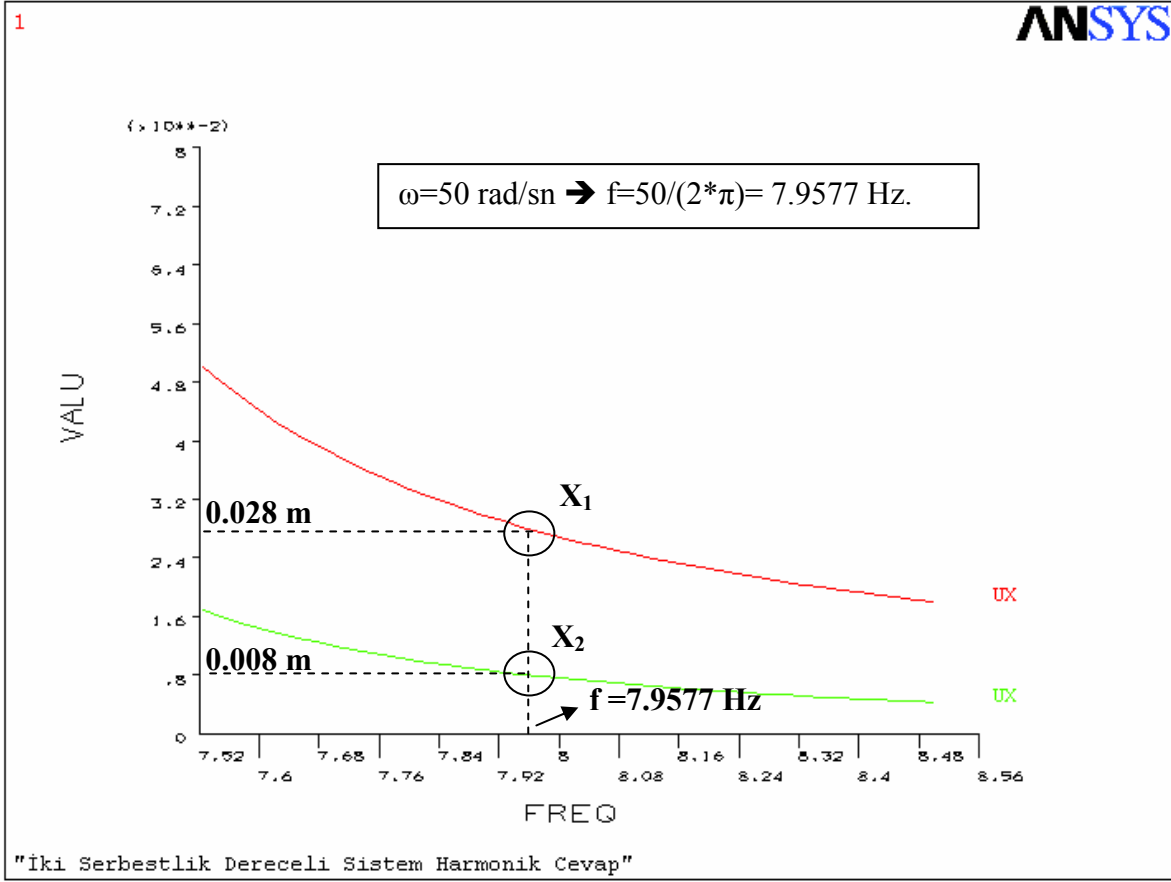
$$\begin{bmatrix} 7500 - 12500 & -5000 \\ -5000 & 7500 - 25000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.028 \\ 0.008 \end{Bmatrix} \text{ (metre)}$$

ANSYS ile

```

/title,"İki Serbestlik Dereceli Sistem Harmonik Cevap"
/prep7
et,1,mass21
et,2,combin14
m=5
k=2500
F=100
r,1,m
r,2,2*m
r,3,k
r,4,2*k
n,1,0,0,0
n,2,1,0,0
n,3,2,0,0
n,4,3,0,0
type,1
real,1
e,2
real,2
e,3
type,2
real,3
e,1,2
real,4
e,2,3
real,3
e,3,4
eplot
/solu
antype,3
d,all,uy,0
d,all,uz,0
d,1,ux,0
d,4,ux,0
f,2,fx,F
harfrq,7.5,8.5 !Hertz cinsinden zorlama frekansı
aralığı
nsubst,40 ! 7.5 ila 8.5 Hz aralığı kaç bölünecek
kbc,1
solve
/post26
nsol,2,2,ux
nsol,3,3,ux
plvar,2,3

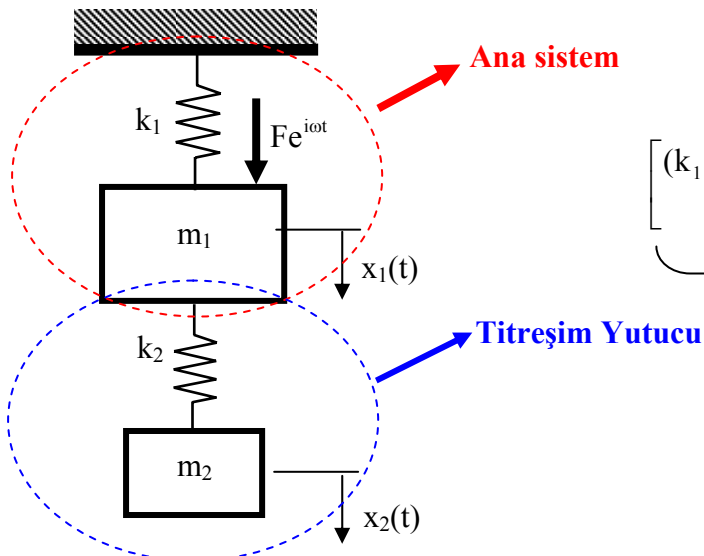
```



DİNAMİK TİTREŞİM YUTUCU:

Sönümsüz Dinamik Titreşim Yutucu:

Tek serbestlik dereceli sönümsüz bir sistemin harmonik zorlama etkisindeki titreşim genlikleri bu sistem üzerine ana sisteme benzer ek bir sistem ilavesi ile yok edilebilir. Bu ek sistemlere dinamik titreşim yutucu adı verilir ve özellikle rezonans durumunda çalışan sistemlerin titreşim genliklerinin bastırılması için uygun çözümlerdir.



$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = A^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & k_2 \\ k_2 & (k_1 + k_2) - m_1 \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{1}{\det(A)} (k_2 - m_2 \omega^2) F$$

$$X_2 = \frac{1}{\det(A)} k_2 F$$

$F \neq 0$ olduğundan ana kütlelerin titreşimlerinin sıfır olabilmesi için ($X_1=0$) $k_2 - m_2 \omega^2 = 0$ olmalıdır. Burada ω harmonik zorlama frekansıdır.

Bu durumda

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \text{ (rad/sn) olmalıdır.}$$

Ana kütlelerin yer değiştirme genliklerinin sıfır olabilmesi için ek sistemin doğal frekansı sistemin çalışma frekansına ayarlanmalıdır.

Bu şekilde ana kütlelerin yer değiştirme genliği sıfır yapılar ise, eklenen sönümleyici sistemin yer değiştirme genliği şu şekilde hesaplanabilir.

$$\det(A) = [(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2] (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2$$

$$\det(A) = (k_1 + k_2) k_2 - (k_1 + k_2) m_2 \omega^2 - m_1 \omega^2 k_2 + m_1 m_2 \omega^4 - k_2^2$$

$$\det(A) = k_1 k_2 + k_2^2 - k_1 m_2 \omega^2 - k_2 m_2 \omega^2 - m_1 \omega^2 k_2 + m_1 m_2 \omega^4 - k_2^2$$

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \text{ yerine konur ise}$$

$$\det(A) = k_1 k_2 - k_1 m_2 \frac{k_2}{m_2} - k_2 m_2 \frac{k_2}{m_2} - m_1 k_2 \frac{k_2}{m_2} + m_1 m_2 \frac{k_2^2}{m_2^2}$$

$$\det(A) = -k_2^2$$

Buradan

$$X_2 = -\frac{1}{k_2^2} k_2 F = -\frac{F}{k_2} \text{ dir.}$$

Görüldüğü gibi titreşim yutucunun yer değiştirme genlikleri k_2 direngenliğine bağlıdır. Titreşim yutucunun yer değiştirme genlikleri azaltılmak isteniyor ise k_2 direngenliği artırılabilir, bununla birlikte yutucunun doğal frekansının sistemin çalışma frekansından farklılaşmaması için yutucu kütlesi de oranı korumak amacıyla artırılmalıdır.

Dinamik titreşim yutuculu sistemin frekans cevaplarına bakılır ise

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ (rad/sn) [Ana sistem doğal frekansı]}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \text{ (rad/sn) [Yutucu-absorber doğal frekansı]}$$

$$\delta_{st} = \frac{F}{k_1} \text{ [Ana kütle statik yer değiştirmesi]}$$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

Yutuculu sistemde ana kütle yer değiştirme genliğinin ana kütle statik yer değiştirme genliğine oranı

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

Yutuculu sistemde yutucunun yer değiştirme genliğinin ana kütle statik yer değiştirme genliğine oranı

Yutucunun doğal frekansı $\left(\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\right)$ zorlama frekansına (ω) eşit olacak şekilde ayarlandığında ana kütle yer değiştirme genliği $X_1=0$ olur. Bu durumda yutucu yer değiştirme genliği yukarıda da bahsedildiği gibi $X_2 = -\frac{F}{k_2}$ dir.

Ana kütle nin rezonans durumunda çalışması ve dinamik titreşim yutucusunun da bu durumda kullanılması söz konusu ise $\omega = \omega_1 = \omega_2$ dir.

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

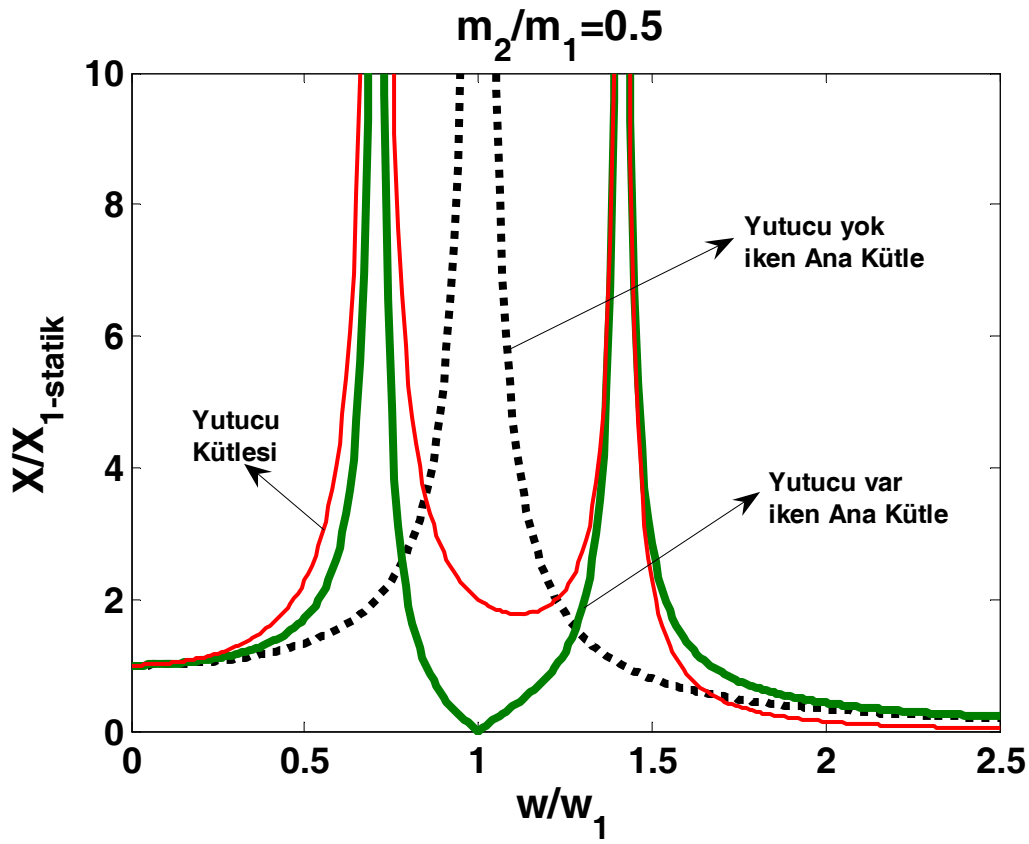
Bu ifadeler yukarıdaki boyutsuz yer değiştirme genliği ifadelerinde yerine konur ise

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{m_2}{m_1}}, \quad \frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{m_2}{m_1}}$$

Kütle oranı için $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ tanımlaması yapılarak

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \mu}, \quad \frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \mu}$$

Sonucuna ulaşılır.

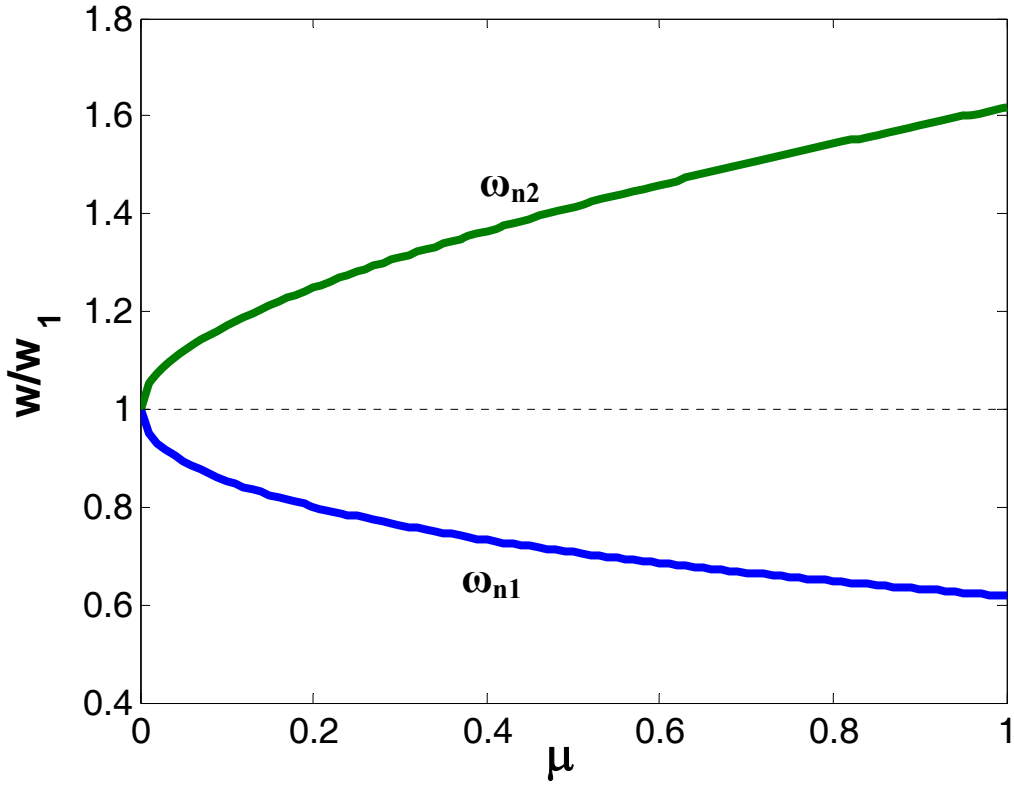


Şekil: Ana kütle ve yutucunun zorlama frekansına bağlı yer değiştirme genlik oranları.

Bu durumda Ana sistem üzerine Dinamik titreşim yutucu eklenmesi ile oluşan iki serbestlik dereceli sistemin doğal frekansları şu şekilde hesaplanabilir.

$$\omega_{1,2} = \omega_1 \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \mp \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}} \quad (\text{rad/sn})$$

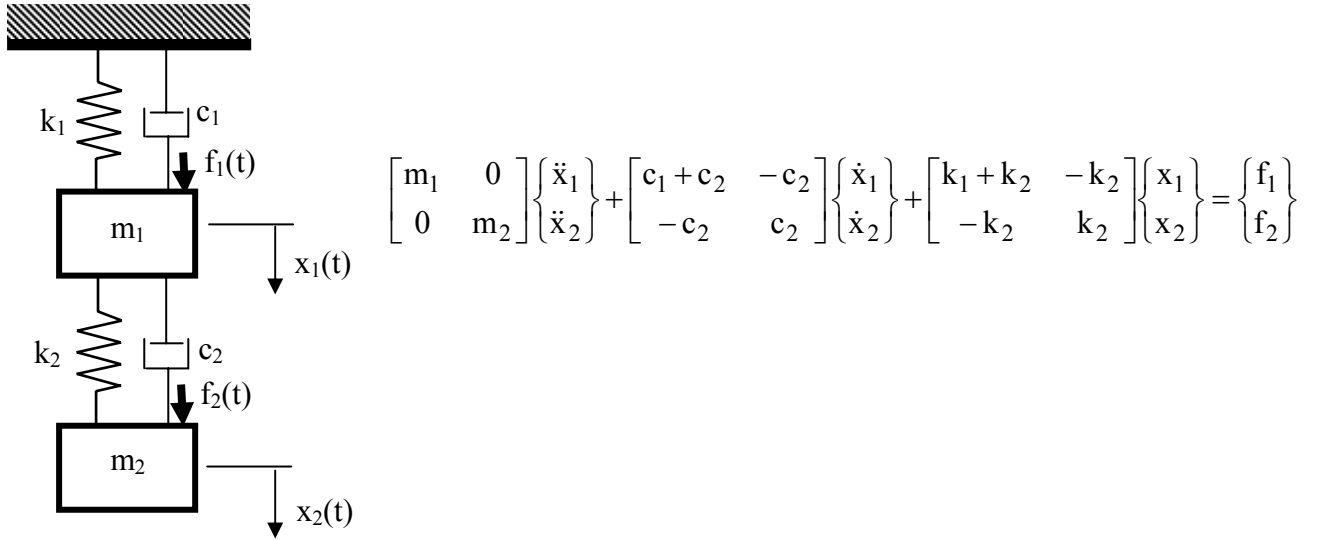
Bu durum için oluşan iki serbestlik dereceli isteme ait boyutsuz doğal frekanslar kütle oranına bağlı olarak aşağıdaki grafik ile gösterilebilir.



MEKANİK TİTREŞİMLER

MODAL ANALİZ:

Çok serbestlik dereceli sistemlerde hareket denklemleri içerisinde tüm serbestlik derecelerini ve/veya türevlerini görmek mümkün olabilir. Dolayısıyla bu şekildeki bağlaşıklık (coupled) hareket denklemleri çözülür iken, denklemlerin birlikte çözümleri gerekir. Laplace transformu ve durum değişkenleri formu kullanılarak hareket denklemlerinin birlikte çözülmesi mümkündür. Diğer taraftan Modal Analiz yöntemi kullanılarak hareket denklemlerini tek başlarına çözülebilir bağımsız denklemler haline getirmek ve elde edilen çözümlerden yola çıkarak Mod Toplama (Mode Superposition) yöntemi ile başlangıç şartları veya verilen bir dış zorlama için gerçek sistem cevaplarını elde etmek mümkündür.



Sönümsüz serbest titreşimler düşünüldüğünde hareket denklemleri aşağıdaki formda yazılır.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = X_1 e^{st} \\ x_2(t) = X_2 e^{st} \\ \ddot{x}_1(t) = s^2 X_1 e^{st} \\ \ddot{x}_2(t) = s^2 X_2 e^{st} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{i. doğal frekans için mod şekilleri} \\ \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right)_i = \frac{k_2}{(k_1 + k_2) - m_1 \omega_i^2} \quad \text{veya} \quad \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} \right)_i = \frac{k_2 - m_2 \omega_i^2}{k_2} \end{array}$$

$$[K]\{X\}_i - \omega_i^2 [M]\{X\}_i = 0$$

Çok serbestlik dereceli bir sistemin i. ve j. doğal frekansları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\omega_i^2 [M] \{X\}_i = [K] \{X\}_i \quad (1)$$

$$\omega_j^2 [M] \{X\}_j = [K] \{X\}_j \quad (2)$$

Denklem 1 $\{X\}_j^T$ ile çarpılır ise

$$\omega_i^2 \underbrace{\{X\}_j^T [M] \{X\}_i}_{(X_j, X_i)_M} = \underbrace{\{X\}_j^T [K] \{X\}_i}_{(X_j, X_i)_K} \quad (3)$$

Denklem 2 $\{X\}_i^T$ ile çarpılır ise

$$\omega_j^2 \{X\}_i^T [M] \{X\}_j = \{X\}_i^T [K] \{X\}_j$$

$$\omega_j^2 (X_i, X_j)_M = (X_i, X_j)_K \quad (4)$$

Denklem 4 Denklem 3'den çıkartılır ise

$$\omega_i^2 (X_j, X_i)_M - \omega_j^2 (X_i, X_j)_M = (X_j, X_i)_K - (X_i, X_j)_K \quad (5)$$

$$(X_j, X_i)_M = (X_i, X_j)_M \quad \text{ve} \quad (X_j, X_i)_K = (X_i, X_j)_K$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)(X_j, X_i)_M = 0$$

$$\omega_i \neq \omega_j \text{ olduğundan} \rightarrow (X_j, X_i)_M = (X_i, X_j)_M = 0 \text{ (Kinetik Enerji Skaler Çarpımı)}$$

Farklı doğal frekanslar için elde edilen mod şekil vektörleri orthogonal'dir (diklik) ve dolayısıyla ile skaler çarpımları sıfırdır. Aynı durum direngenlik matrisi ile oluşturulan çarpım için de geçerlidir.

$$(X_i, X_j)_K = 0 \text{ (Potansiyel Enerji Skaler Çarpımı)}$$

Bağlaşık durumdaki diferansiyel denklemleri bağlaşık olmayan (uncoupled) hale getirmek için kütle, sönüm ve direngenlik matrisleri Modal matris (P) ile işleme sokulur.

$$[M]_q = [P]^T [M] [P], \quad [M]_q = \begin{bmatrix} m_{q11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{q22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_{qnn} \end{bmatrix}$$

$$[C]_q = [P]^T [C] [P], \quad [C]_q = \begin{bmatrix} c_{q11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{q22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{qnn} \end{bmatrix}$$

$$[K]_q = [P]^T [K] [P], \quad [K]_q = \begin{bmatrix} k_{q11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{q22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & k_{qnn} \end{bmatrix}$$

Modal koordinatlar kullanılarak hareket denklemleri bağımsız hale getirilebilir.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$$

$$\{x\} = [P]\{q\} \text{ kabul edilerek. } \{q\} = [P]^{-1}\{x\}$$

$$[M][P]\{\ddot{q}\} + [C][P]\{\dot{q}\} + [K][P]\{q\} = \{f\}$$

Denklemin her iki tarafını $[P]^{-1}$ ile çarparsak

$$[P]^{-1}[M][P]\{\ddot{q}\} + [P]^{-1}[C][P]\{\dot{q}\} + [P]^{-1}[K][P]\{q\} = [P]^{-1}\{f\}$$

$$[M]_q \{\ddot{q}\} + [C]_q \{\dot{q}\} + [K]_q \{q\} = [P]^{-1}\{f\}$$

Serbest titreşim için sağ taraf sıfır olur.

Bu durumda

$$[M]_q \{\ddot{q}\} + [C]_q \{\dot{q}\} + [K]_q \{q\} = 0$$

Başlangıç şartları altındaki serbest titreşim cevabı için

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} [A_i \cos(\omega_{di} t) + B_i \sin(\omega_{di} t)], \quad i=1,2,\dots,n. \quad (n \text{ sistemin serbestlik derecesidir})$$

İlk şartlar modal koordinatlarda şu şekilde elde edilebilir.

$$\{q\}_0 = [P]^{-1}\{x\}_0, \{\dot{q}\}_0 = [P]^{-1}\{\dot{x}\}_0$$

Bu durumda A_i ve B_i katsayıları şu şekilde elde edilebilir.

$$A_i = q_{i0}, B_i = \frac{\dot{q}_{i0} + \zeta_i \omega_{ni} q_{i0}}{\omega_{di}}$$

$$\zeta_i = \frac{c_{qii}}{2\sqrt{k_{qii}m_{qii}}}, \omega_{di} = \omega_{ni}\sqrt{1-\zeta_i^2}$$

İlk şartlara bağlı cevap modal koordinatlarda bulunduktan sonra ters dönüşüm ile gerçek koordinatlara geçiş yapılabilir.

$$\{x\}_t = [P]\{q\}_t$$

Örnek olarak iki serbestlik dereceli bir sistem için,

$$\begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} q_1(t) \\ q_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = P_{11}q_1(t) + P_{12}q_2(t) \\ x_2(t) = P_{21}q_1(t) + P_{22}q_2(t) \end{cases} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Genel koordinatlar için cevap, modal koordinatlardaki cevapların toplamı şeklinde elde edilebilir. Çok serbestlik dereceli sistemlerin cevabı için önemli modların katkılarını dikkate almak çoğu zaman yeterli doğrulukta cevap elde etmemizi sağlar.

Örnek:

Yukarıda verilen iki serbestlik dereceli sistem için sistem parametreleri aşağıda verilmiştir. Sönümsüz durum için verilen başlangıç şartları altında sistem cevabını bulunuz.

$$m_1=1 \text{ kg}$$

$$m_2=0.5 \text{ kg}$$

$$k_1=1 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$k_2=2 \times 10^7 \text{ N/m}$$

$$x_1(0)=1 \text{ mm}, \dot{x}_1(0)=0$$

$$x_2(0)=-1 \text{ mm}, \dot{x}_2(0)=0$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^7 & -2 \times 10^7 \\ -2 \times 10^7 & 2 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

Doğal frekanslar için

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 \times 10^7 - \omega^2 & -2 \times 10^7 \\ -2 \times 10^7 & 2 \times 10^7 - 0.5 \omega^2 \end{vmatrix} \rightarrow 0.5 \omega^4 - 3.5 \times 10^7 \omega^2 + 2 \times 10^{14} = 0$$

$$\omega_1 = 2505.4314 \text{ rad/sn}, \quad \omega_2 = 7982.6570 \text{ rad/sn}$$

x_2 'ye göre normalize edilmiş mod şekilleri hesaplanır ise

$$\left(\frac{X_1}{X_2} \right)_1 = \frac{k_2}{(k_1 + k_2) - m_1 \omega_1^2} = \frac{2 \times 10^7}{3 \times 10^7 - 1 \times 2506^2} = 0.843070$$

$$\left(\frac{X_1}{X_2} \right)_2 = \frac{k_2}{(k_1 + k_2) - m_1 \omega_2^2} = \frac{2 \times 10^7}{3 \times 10^7 - 1 \times 7982.6570^2} = -0.59307$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.843070 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.59307 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Titreşim biçimleri elde edildikten sonra modal matris şu şekilde yazılabilir.

$$P = [\phi_1 \quad \phi_2] = \begin{bmatrix} 0.84307 & -0.59307 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{X\}_j^T [M] \{X\}_i$ çarpımını kontrol edersek

$$\begin{Bmatrix} -0.59307 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.84307 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.000101 \text{ görüldüğü gibi sıfır alınabilir.}$$

$\{X\}_j^T K \{X\}_i$ çarpımını kontrol edersek

$$\begin{Bmatrix} -0.59307 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \times 10^7 & -2 \times 10^7 \\ -2 \times 10^7 & 2 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.84307 \\ 1 \end{Bmatrix} \cong 0 \text{ olduğu görülür (virgülden sonra fazla basamak alınmalı).}$$

Elde edilen modal matris kullanılarak modal koordinatlara geçilebilir.

$$[M]_q = [P]^T [M] [P] = \begin{bmatrix} 0.84307 & 1 \\ -0.59307 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.84307 & -0.59307 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.21076 & 0 \\ 0 & 0.85173 \end{bmatrix}$$

$$[K]_q = [P]^T [K] [P] = \begin{bmatrix} 0.84307 & 1 \\ -0.59307 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \times 10^7 & -2 \times 10^7 \\ -2 \times 10^7 & 2 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.84307 & -0.59307 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.6 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 5.4275 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

$$[M]_q \{\ddot{q}\} + [K]_q \{q\} = 0$$

$$1.21076\ddot{q}_1 + 7.6 \times 10^6 q_1 = 0$$

$$0.85173\ddot{q}_2 + 5.4275 \times 10^7 q_2 = 0$$

Verilen ilk şartları modal koordinatlara dönüştürür isek

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_0 = [P]^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_0 \rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 0.59307 \\ -1 & 0.84307 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{Bmatrix}$$

$$\det(P) = 1.436$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 0.283 \\ -1.283 \end{Bmatrix} \text{ (mm)}$$

Sönümsüz durum için,

$$q_1(t) = A_1 \cos \omega_{n1} t + B_1 \sin \omega_{n1} t$$

$$A_1 = q_{1,0} = 0.283, \quad B_1 = \frac{\dot{q}_{1,0}}{\omega_{n1}} = 0$$

$$q_1(t) = 0.283 \cos 2505.43 t \text{ (mm)}$$

$$q_2(t) = q_{2,0} \cos \omega_{n2} t + \frac{\dot{q}_{2,0}}{\omega_{n2}} \sin \omega_{n2} t$$

$$q_2(t) = -1.283 \cos 7982.65 t \text{ (mm)}$$

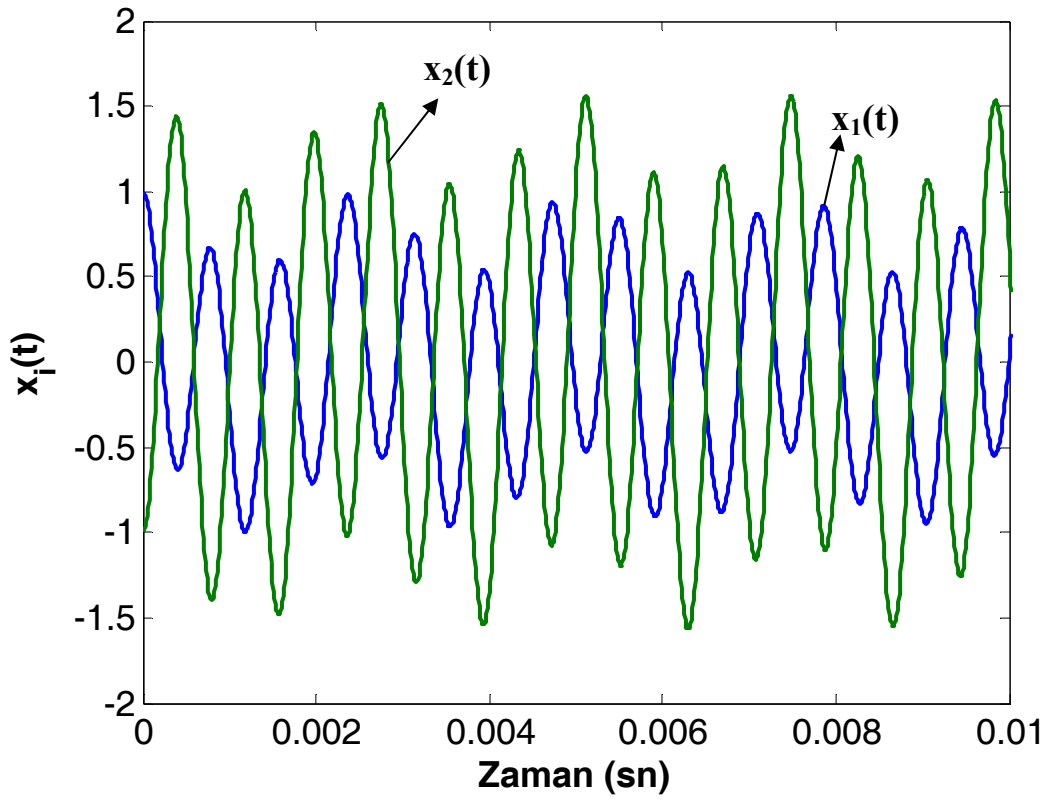
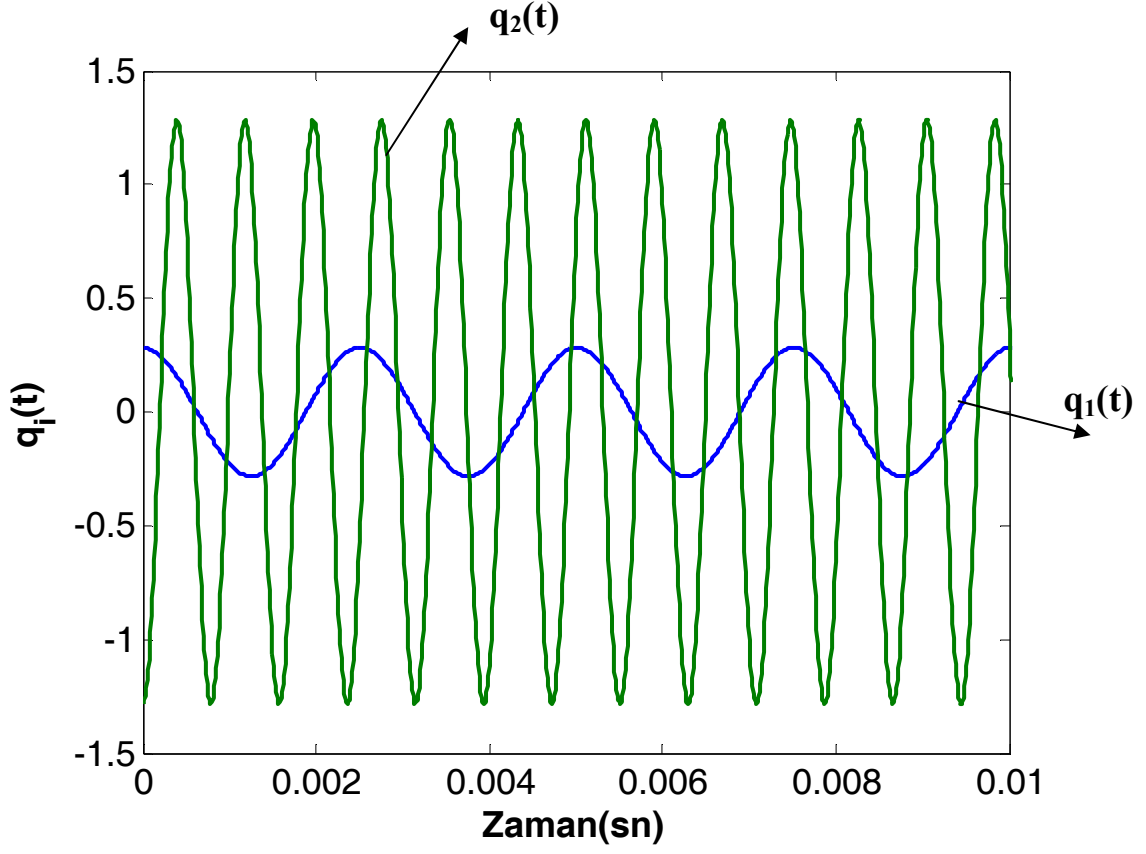
Modal koordinatlarda elde edilen çözümler, gerçek koordinatlara Modal matris yardımı ile aktarılabilir.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_t = [P] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_t$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0.84307 & -0.59307 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_t$$

$$x_1(t) = 0.84307 q_1(t) - 0.59307 q_2(t) = 0.2386 \cos(2505.434 t) + 0.7609 \cos(7982.65 t) \text{ (mm)}$$

$$x_2(t) = q_1(t) + q_2(t) = 0.283 \cos(2505.43 t) - 1.283 \cos(7982.65 t) \text{ (mm)}$$



TİTREŞİM BİÇİMLERİNİN KÜTLE VEYA DİRENGENLİK MATRİSİ KULLANILARAK NORMALİZASYONU:

Yukarıda verilen örnekte titreşim biçimlerinin normalizasyonu X_2 modal yer değiştirme kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Titreşim biçimleri normalize edilir iken kütle ve direngenlik matrislerinden de yararlanılabilir.

Modal matris ve kütle/direngenlik matrisleri kullanılarak şu ilişkiler yazılabilir.

$$[P]^T [M][P] = [I], [P]^T [K][P] = \omega_n^2 [I], \text{ burada } I \text{ birim matristir.}$$

Bu ifadelerde verilen modal matrisi oluşturmak için titreşim biçimleri kütle veya direngenlik matrisleri kullanılarak normalize edilmelidir.

Bu işlem için $a_i \{X\}_i^T [M] \{X\}_i = 1$ veya $a_i \{X\}_i^T [K] \{X\}_i = \omega_i^2$ ifadeleri kullanılabilir.

Örnek olarak yukarıda verilen problem için kütle matrisi kullanılarak normalizasyon yapılır ve modal matris elde edilir ise.

$$\omega_1 = 2505.4314 \text{ rad/sn}, \quad \omega_2 = 7982.6570 \text{ rad/sn}$$

$$\{X\}_1 = \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.843070 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{X\}_2 = \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.59307 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Normalize edilmiş titreşim biçimi $\phi_i^n = a_i \phi_i$ şeklinde ifade edilir ise kütle matrisine göre normalizasyon şu şekilde yapılabilir.

Birinci titreşim biçimi için

$$a_1 \begin{bmatrix} 0.843070 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} a_1 \begin{bmatrix} 0.843070 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$a_1^2 \begin{bmatrix} 0.843070 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.843070 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 1$$

$$1.21076 a_1^2 = 1 \rightarrow a_1 = 0.9088 \rightarrow \phi_1^n = \{X\}_1^n = 0.9088 \begin{Bmatrix} 0.843070 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7661 \\ 0.9088 \end{Bmatrix}$$

İkinci titreşim biçimi için

$$a_2 \begin{bmatrix} -0.593070 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} a_2 \begin{bmatrix} -0.59307 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$a_2^2 \begin{bmatrix} -0.59307 & 1 \\ & 0.5 \end{bmatrix} = 1$$

$$0.8517 a_2^2 = 1 \rightarrow a_2 = 1.0835 \rightarrow \phi_2^n = \{X\}_2^n = 1.083 \begin{Bmatrix} -0.59307 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.6426 \\ 1.083 \end{Bmatrix}$$

Kütle matrisi kullanılarak yapılan normalizasyon sonucu elde edilmiş Modal Matris aşağıdaki gibidir.

$$P = \begin{bmatrix} 0.7661 & -0.6426 \\ 0.9088 & 1.083 \end{bmatrix}$$

Sönümsüz titreşimler için hareket denklemi

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

$x=Pq$ dönüşümü ile $\ddot{x} = P\ddot{q}$

$$[M][P]\{\ddot{q}\} + [K][P]\{q\} = \{f(t)\}$$

Denklemin her iki tarafını P^{-1} ile çarparsak

$$[P]^{-1} [M][P]\{\ddot{q}\} + [P]^{-1} [K][P]\{q\} = [P]^{-1} \{f(t)\}$$

$$\{\ddot{q}\} + \omega_n^2 [I]\{q\} = \{g(t)\}, \quad \{g(t)\} = P^{-1} \{f(t)\} \text{ şeklinde ifade edilebilir.}$$

Böylece n serbestlik dereceli sönümsüz bir sistem için hareket denklemleri

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = g_1(t)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = g_2(t)$$

⋮

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = g_n(t)$$

Şeklinde ifade edilerek denklemler bağımsız olarak çözülebilir. Sistemin çözümü $x = Pq$ ifade kullanılarak elde edilir.

Yukarıdaki örneği çözersek

$$\omega_1 = 2505.4314 \text{ rad/sn}, \quad \omega_2 = 7982.6570 \text{ rad/sn}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.7661 & -0.6426 \\ 0.9088 & 1.083 \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} 1.083 & 0.6426 \\ -0.9088 & 0.7661 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00031179 \\ -0.0011844 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} 1.083 & 0.6426 \\ -0.9088 & 0.7661 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{q}_1 + 2505.4314^2 q_1 = 0$$

$q_1(t) = A_1 \cos \omega_{n1} t + B_1 \sin \omega_{n1} t$ kullanılarak

$$A_1 = 0.00031179, B_1 = 0$$

$$q_1(t) = 0.00031179 \cos(2505.4314t)$$

$$\ddot{q}_2 + 7982.657^2 q_2 = 0$$

$q_2(t) = A_2 \cos \omega_{n2} t + B_2 \sin \omega_{n2} t$ kullanılarak

$$A_2 = -0.0011844$$

$$B_2 = 0$$

$$q_2(t) = -0.0011844 \cos(7982.657t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7661 & -0.6423 \\ 0.9088 & 1.083 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00031179 \cos(2505.431t) \\ -0.0011844 \cos(7982.657t) \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = 0.0002388 \cos(2505.431t) + 0.0007607 \cos(7982.657t) \text{ (m)}$$

$$x_2(t) = 0.0002833 \cos(2505.431t) - 0.00128 \cos(7982.657t) \text{ (m)}$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi iki cevap da bir önceki ile aynıdır.

MEKANİK TİTREŞİMLER

MİLLERİN SAVRULMA TİTREŞİMLERİ (WHIRLING OF SHAFTS):

Birçok mühendislik uygulaması, rotor veya disk taşıyan yataklanmış dönel miller (şaftlar) barındırmaktadır. Şaft-rotor sisteminde montaj, imalat ve malzeme kaynaklı kütle kaçıklıkları sebebi ile, şaft dönüşü sırasında özellikle yüksek hızlarda şaftın eğilmesi ve titreşimi söz konusu olmaktadır. Bu dönüş hareketi sırasında yatak (bearing) eksenini mil eksenini arasında şekilde görüldüğü gibi sapmalar oluşmaktadır (X). Mil-Rotor/disk sisteminde, kütle merkezi ile disk/rotor geometrik merkezi arasındaki kaçıklık " e "de dikkate alındığında ω açısal hızı ile dönen bir mil üzerinde etkili olan santrifüj kuvvet $m\omega^2(X + e)$, mil direngenliği tarafından karşılanmaktadır (kX).

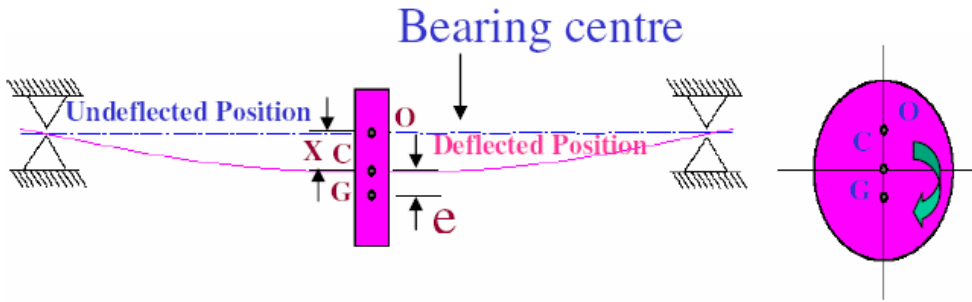
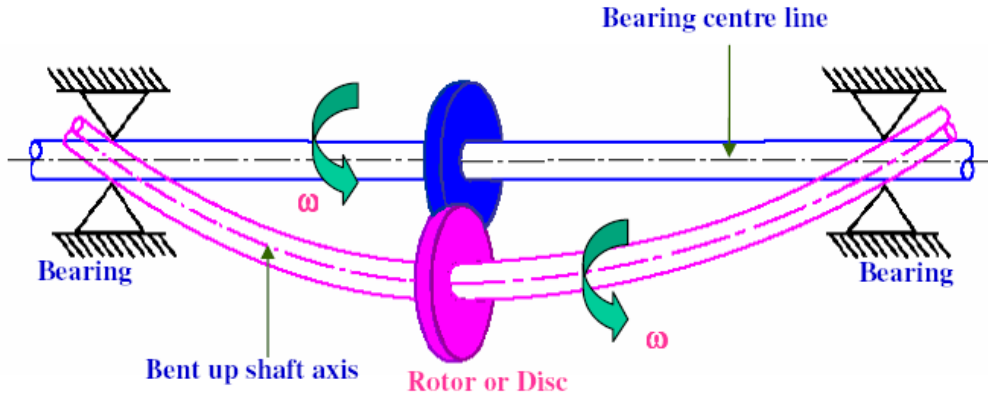


Figure 5.10 Whirling of Shaft



Dr. B. K. Sridhara, Asst. Professor, Mechanical Engineering, NIE, Mysore-8

m disk/rotor kütlesi olmak üzere,

$$K X = m \omega^2 (X + e)$$

$$K X = m \omega^2 X + m \omega^2 e$$

$$(K - m \omega^2) X = m \omega^2 e$$

$$X = \frac{m \omega^2}{(K - m \omega^2)} e$$

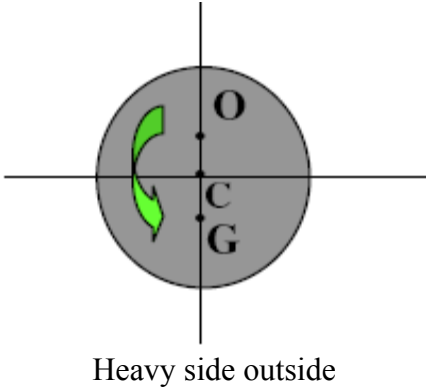
Kaynaklar: *Theory of Vibrations*-W.T.Thomson, *Elements of Vibration Analysis*-L. Meirovitch, *Vibrations of Continuous Systems*-S. Rao, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*-S.G. Kelly, *Vibration Problems in Engineering*-W.Weaver, S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Engineering Vibrations*-D.J. Inman, *Mühendislik Sistemlerinin Modellenmesi ve Dinamiği*-Yücel Ercan, *Dynamics and Vibration*-M.A. Wahab.

X çökme değeri için kritik durum $K - m\omega^2 = 0$ için ortaya çıkar. Bu durumda

$\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$ olarak elde edilir ve bu dönüş frekansına milin kritik frekansı denir.

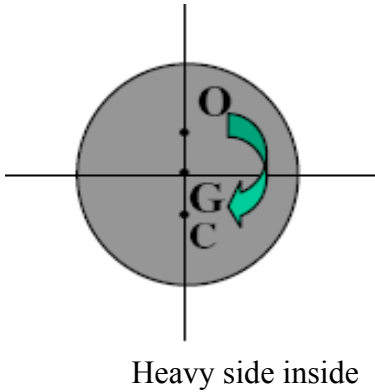
$$X = \frac{\omega^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)} e$$

$\omega < \omega_c$ için X ve e'nin yönleri aynı olur ve bu durum "Heavy Side Outside" olarak adlandırılır.



$\omega = \omega_c$ durumunda ise X genlikleri sonsuza ulaşır ve bu durum mil ve taşıdığı sistem için hasar demektir.

$\omega > \omega_c$ için X ve e'nin yönleri terstir ve bu duruma "Heavy Side Inside" durumu adı verilir.



Çok yüksek hızla dönen miller için $\omega \gg \omega_c$ X genliği $-e$ değerine yaklaşmaktadır. Bu durumda disk/rotor diskin kütle merkezi etrafında (G) dönmektedir ve dengesizliğin olmadığı arzu edilen bir sonuç elde edilir. Uçak motorlarındaki yüksek hızlı dönüşün stabiliteye etkisi bu şekilde açıklanabilir. Dunkerley shaftların kritik savrulma hızlarının, düşey titreşim doğal

frekansına eşit olduğunu ifade etmiştir. Savrulma titreşimlerinin adedi, şaft rotor sisteminin doğal frekans sayısına eşittir.

Örnek: 12 kg kütleyle sahip bir rotor 24 mm çapında ve iki ucundan yataklanmış yatay bir şaftın ortasına monte edilmiştir. Yataklar arası mesafe 1 m'dir. Şaft 1200 dev/dak ile dönmektedir. Rotorun kütle merkezi bazı üretim hataları dolayısıyla, rotorun geometrik merkezinden 0.11 mm kaçıktır. Şaftın düzenli rejim titreşim genliğini ve yataklara gelen kuvveti bulunuz. Şaft malzemesi çeliktir, $E=200\text{GPa}$.

Çözüm:

$$X = \frac{\omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2} e$$

$$\text{Dairesel kesitli mil için polar alan atalet momenti } I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3.1416 \times 0.024^4}{64} = 1.628 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Göreceli olarak kısa miller için sınır şartı olarak basit mesnetli durum kabul edilir. Bu duurm için milin düşey titreşimlerinin doğal frekansı

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{stat}}}} \text{ (rad/sn)}$$

$$\delta_{\text{stat}} = \frac{mgL^3}{48EI} = \frac{12 * 9.81 * 1^3}{48 * 2 \times 10^{11} * 1.628 \times 10^{-8}} = 0.000752 \text{ m.}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9.81}{0.000752}} = 114.215 \text{ (rad/sn)}$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = \frac{\pi 1200}{30} = 125.66 \text{ (rad/sn)}$$

$$X = \frac{125.66^2}{114.215^2 - 125.66^2} * 0.00011 = -0.000632 \text{ m.}$$

Yatay millerde $r = \frac{\omega}{\omega_c} < 1$ için yataklardaki toplam reaksiyon kuvveti $F_y = m\omega^2(X+e) + mg$,

$r = \frac{\omega}{\omega_c} > 1$ için $F_y = m\omega^2(X-e) + mg$ dir.

$$F_y = 12 * 125.66^2 (0.000631 - 0.00011) + 12 * 9.81 = 217.01 \text{ N.}$$

Her bir yatak için reaksiyon,

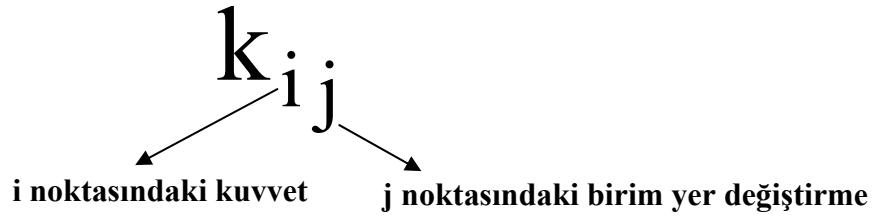
$$F_b = \frac{F_y}{2} = \frac{217.01}{2} = 108.5 \text{ N.}$$

ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN HAREKET DENKLEMLERİNİN TESİR KATSAYILARI (INFLUENCE COEFFICIENTS) YÖNTEMİ İLE ELDE EDİLMESİ:

Direngelik Tesir Katsayıları (Stiffness Influence Coefficients):

Çok serbestlik dereceli sistemlere ait hareket denklemleri tesir katsayıları yöntemi kullanılarak elde edilebilir. Bu bölümde çok serbestlik dereceli bir sistem ait direngelik matrisinin tesir katsayıları ile elde edilmesi üzerinde durulmuştur.

Doğrusal bir yay için, yayda birim uzama meydana getirecek kuvvet değeri yayın direngeliğini vermektedir. Kompleks sistemlerde bir noktadaki yer değiştirmeye bağlı olarak sistemin diğer noktalarındaki kuvvetler arasındaki ilişki direngelik tesir katsayıları ile ifade edilebilir. Direngelik tesir katsayısı k_{ij} ile gösterilir. k_{ij} , j noktasındaki birim yer değiştirme nedeni ile i noktasında oluşan kuvvet değeridir. k_{ij} belirlenir iken j noktası dışındaki noktalar için yer değiştirme değeri sıfır olarak alınır.



Bu tanımdan hareket ile bir n serbestlik dereceli bir yay kütle sistemi için, i noktasındaki toplam kuvvet F_i , tüm j noktalarındaki birim yer değiştirmelerden kaynaklanan kuvvetlerin toplanması ile elde edilebilir.

$$F_i = \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j, \quad i=1,2,\dots,n.$$

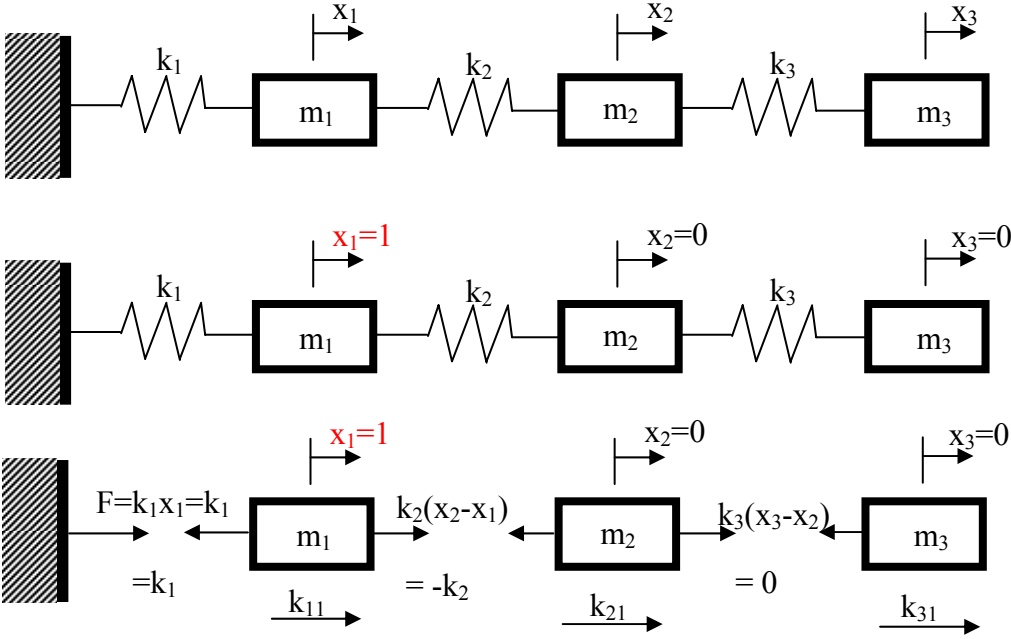
Bu ifade matris formunda yazılır ise

$$\{F\} = [k]\{x\}$$

Burada $[k]$ direngelik matrisi olarak adlandırılır ve

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \text{şeklindedir.}$$

Örnek: Şekildeki üç serbestlik dereceli kütle-yay sistemi için direngenlik matrisini direngenlik tesir katsayıları yöntemi ile elde edelim.



m_1 kütlesi için

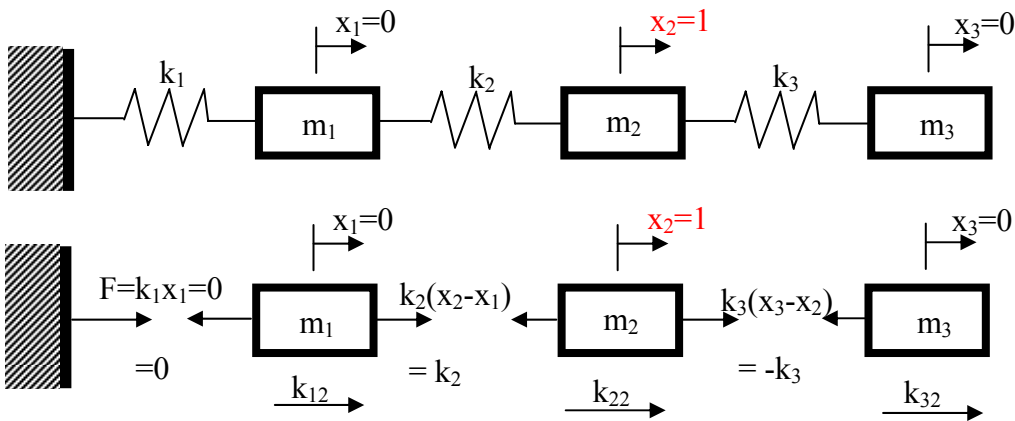
$$k_{11} - k_2 = k_1 \rightarrow k_{11} = k_1 + k_2$$

m_2 kütlesi için

$$k_{21} + 0 = -k_2 \rightarrow k_{21} = -k_2$$

m_3 kütlesi için

$$k_{31} + 0 = 0 \rightarrow k_{31} = 0$$



m_1 kütlesi için

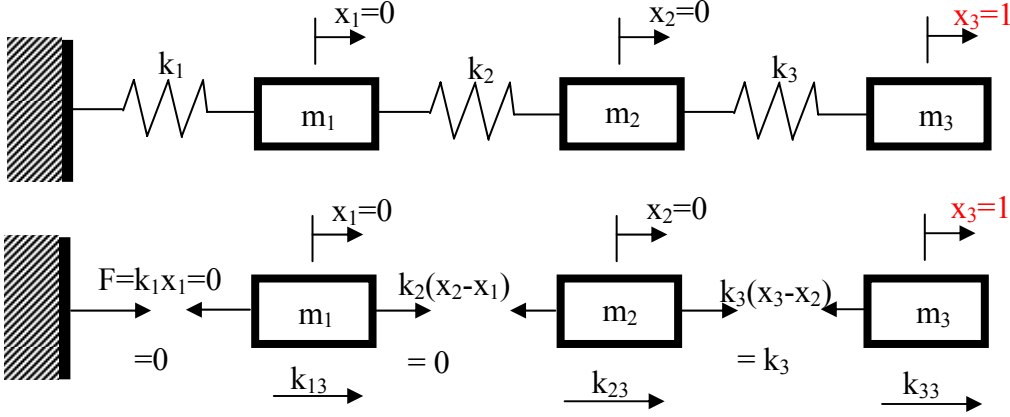
$$k_{12} + k_2 = 0 \rightarrow k_{12} = -k_2$$

m_2 kütlesi için

$$k_{22} + (-k_3) = k_2 \rightarrow k_{22} = k_2 + k_3$$

m_3 kütlesi için

$$k_{32} + 0 = -k_3 \rightarrow k_{32} = -k_3$$



m_1 kütlesi için

$$k_{13} + 0 = 0 \rightarrow k_{13} = 0$$

m_2 kütlesi için

$$k_{23} + k_3 = 0 \rightarrow k_{23} = -k_3$$

m_3 kütlesi için

$$k_{33} + 0 = k_3 \rightarrow k_{33} = k_3$$

Bulunan değerler kullanılarak direngenlik matrisi şu şekilde elde edilir.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = [k]\{x\} \text{ 'den}$$

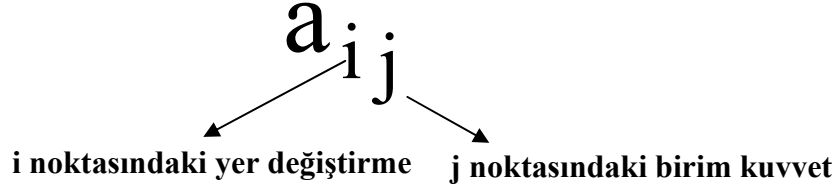
$$F_1 = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2$$

$$F_2 = -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3$$

$$F_3 = -k_3x_2 + k_3x_3$$

Esneklik Tesir Katsayıları (Flexibility Influence Coefficients):

Esneklik tesir katsayıları hesabında sistemin her bir serbestlik derecesi birim kuvvet ile uyarılarak, sistemin diğer serbestlik derecelerindeki yer değiştirmeler hesaplanır. Çok serbestlik dereceli sistem j . noktasından 1 birimlik bir kuvvet ile uyarıldığında i . noktadaki yer değiştirmeler bu noktadaki esneklikleri ifade eder. Esneklik tesir katsayısı a_{ij} ile ifade edilir.



Lineer bir sistem için yer değiştirme uygulanan kuvvet ile doğrusal olarak arttığı için

$$x_{ij} = a_{ij} F_j$$

olarak yazılabilir.

Eğer birden fazla F_j kuvveti ($j=1,2,\dots,n$) sistemin farklı noktalarından etki ediyor ise, herhangi bir i noktasındaki toplam yer değiştirme tüm kuvvetlerin katkısı ile hesaplanabilir.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Bu ifade matris formunda şu şekilde yazılabilir.

$$\{x\} = [a]\{F\}$$

Burada a esneklik matrisidir.

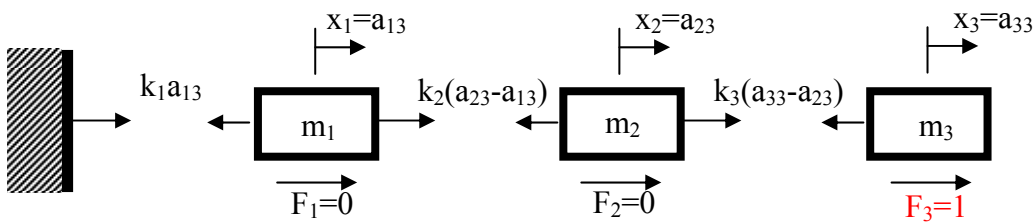
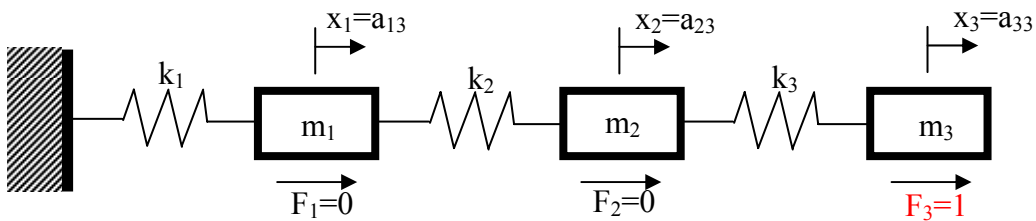
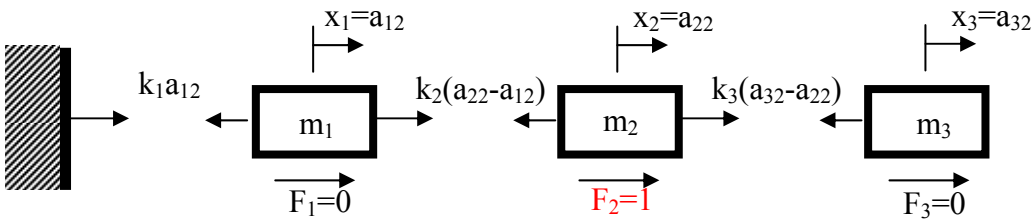
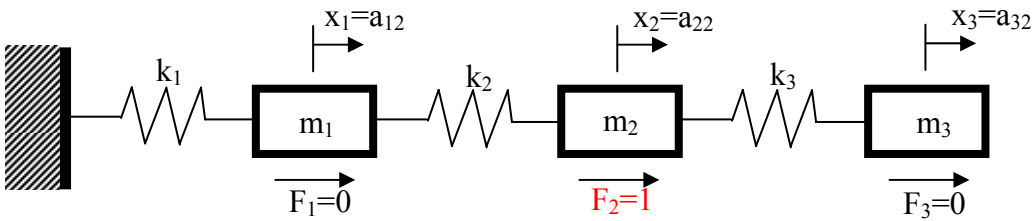
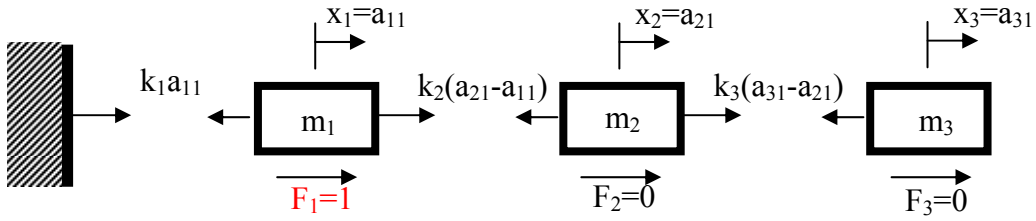
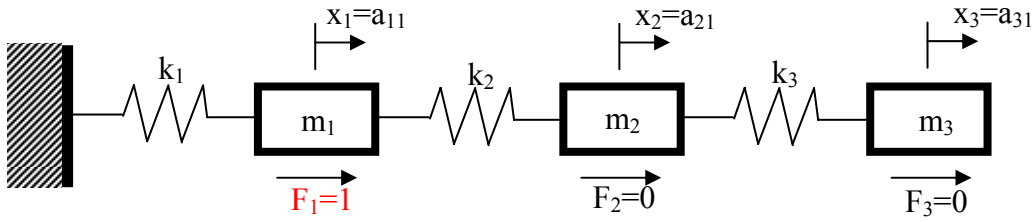
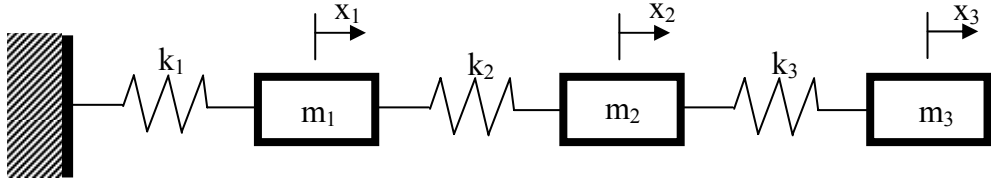
$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dirençlik matrisi ile esneklik matrisi arasındaki ilişki şu şekilde elde edilebilir.

$$\{x\} = [a]\{F\} = [a][k]\{x\}$$

$$[a][k] = [I] \rightarrow [a] = [k]^{-1} \text{ Esneklik matrisi dirençlik matrisinin tersi alınarak elde edilebilir.}$$

Az önceki üç serbestlik dereceli kütle-yay sistemi için esneklik matrisini elde edelim.



Kuvvetin m_1 'den uygulanması durumunda

m_1 için kuvvet dengesi

$$1 + k_2(a_{21} - a_{11}) = k_1 a_{11} \rightarrow (k_1 + k_2)a_{11} - k_2 a_{21} = 1 \quad (1)$$

m_2 için kuvvet dengesi

$$k_3(a_{31} - a_{21}) - k_2(a_{21} - a_{11}) = 0 \rightarrow k_2 a_{11} - (k_2 + k_3)a_{21} + k_3 a_{31} = 0 \quad (2)$$

m_3 için kuvvet dengesi

$$-k_3(a_{31} - a_{21}) = 0 \rightarrow k_3 a_{21} - k_3 a_{31} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{11} = \frac{1}{k_1} \\ a_{21} = \frac{1}{k_1} \\ a_{31} = \frac{1}{k_1} \end{matrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Kuvvetin m_2 'den uygulanması durumunda

m_1 için kuvvet dengesi

$$k_2(a_{22} - a_{12}) = k_1 a_{12} \rightarrow -(k_1 + k_2)a_{12} + k_2 a_{22} = 0 \quad (1)$$

m_2 için kuvvet dengesi

$$k_3(a_{32} - a_{22}) + 1 = k_2(a_{22} - a_{12}) \rightarrow k_2 a_{12} - (k_2 + k_3)a_{22} + k_3 a_{32} = -1 \quad (2)$$

m_3 için kuvvet dengesi

$$-k_3(a_{32} - a_{22}) = 0 \rightarrow k_3 a_{22} - k_3 a_{32} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{12} = \frac{1}{k_1} \\ a_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ a_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \end{matrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Kuvvetin m_3 'den uygulanması durumunda

m_1 için kuvvet dengesi

$$k_2(a_{23} - a_{13}) = k_1 a_{13} \rightarrow -(k_1 + k_2)a_{13} + k_2 a_{23} = 0 \quad (1)$$

m_2 için kuvvet dengesi

$$k_3(a_{33} - a_{23}) = k_2(a_{23} - a_{13}) \rightarrow k_2 a_{13} - (k_2 + k_3)a_{23} + k_3 a_{33} = 0 \quad (2)$$

m_3 için kuvvet dengesi

$$1 = k_3(a_{33} - a_{23}) = 0 \rightarrow k_3 a_{23} - k_3 a_{33} = -1 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{13} = \frac{1}{k_1} \\ a_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ a_{33} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{matrix} \quad \text{olarak elde edilir.}$$

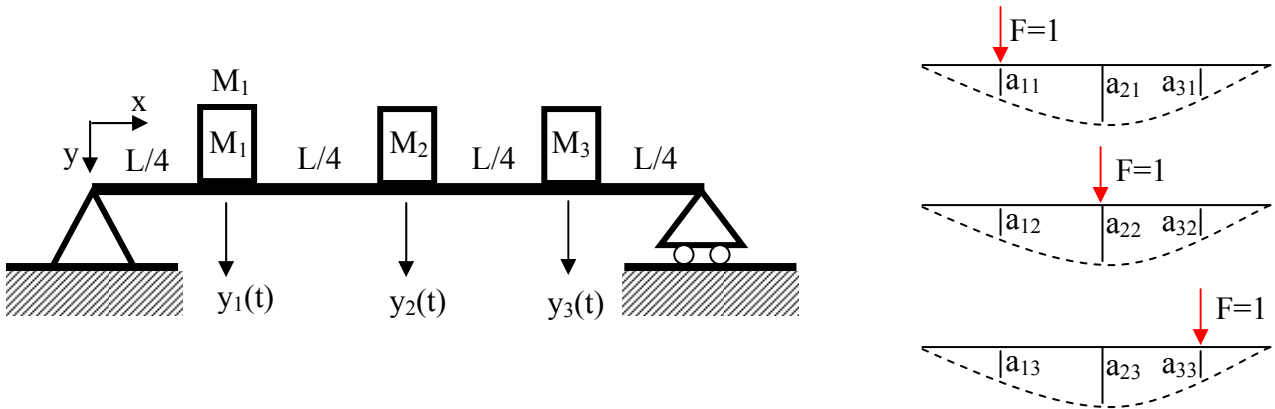
Esneklik matrisi yazılır ise

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{bmatrix}$$

Aynı sonuca k direngenlik matrisinin tersi alınarak da ulaşılabilir.

Örnek:

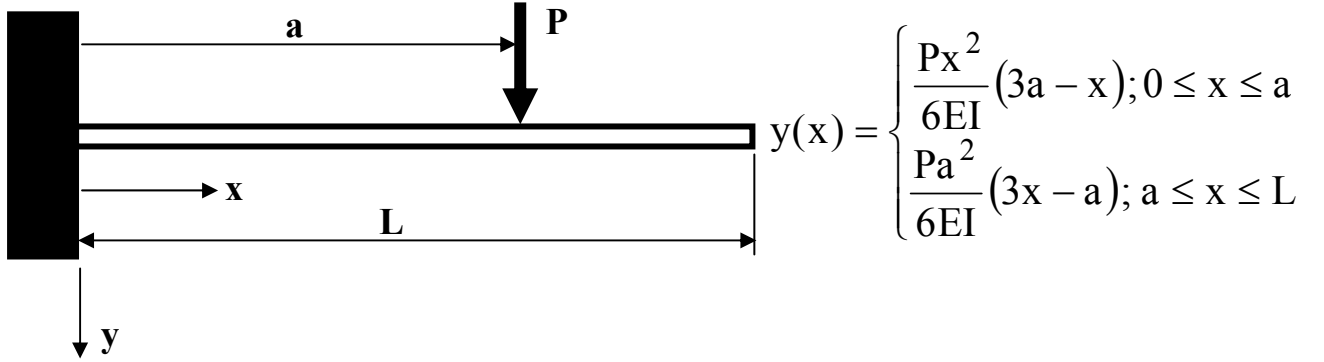
Şekilde verilen basit mesnetli ve kütlesi ihmal edilebilir kiriş için esneklik matrisini oluşturunuz. Üç kütle de eşit aralıklar ile yerleştirilmiştir. Kiriş düzgün kesitlidir ve EI eğilme rijitliğine sahiptir.



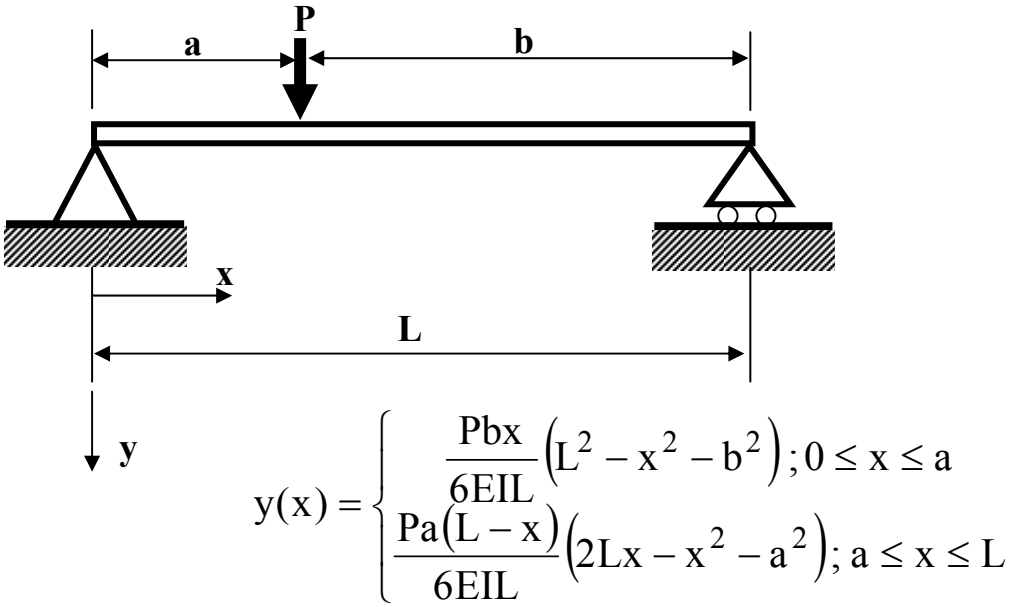
Esneklik matrisini oluşturmak için sistemdeki her bir kütlede etki eden birim genlikteki kuvvete karşılık, her bir kütlede oluşacak yer değiştirmeleri (çökmeler) hesaplamamız gereklidir. Aşağıda sık kullanılan sınır şartları için çökme formülleri verilmiştir.

BAZI KİRİŞLER İÇİN ÇÖKME İFADELERİ

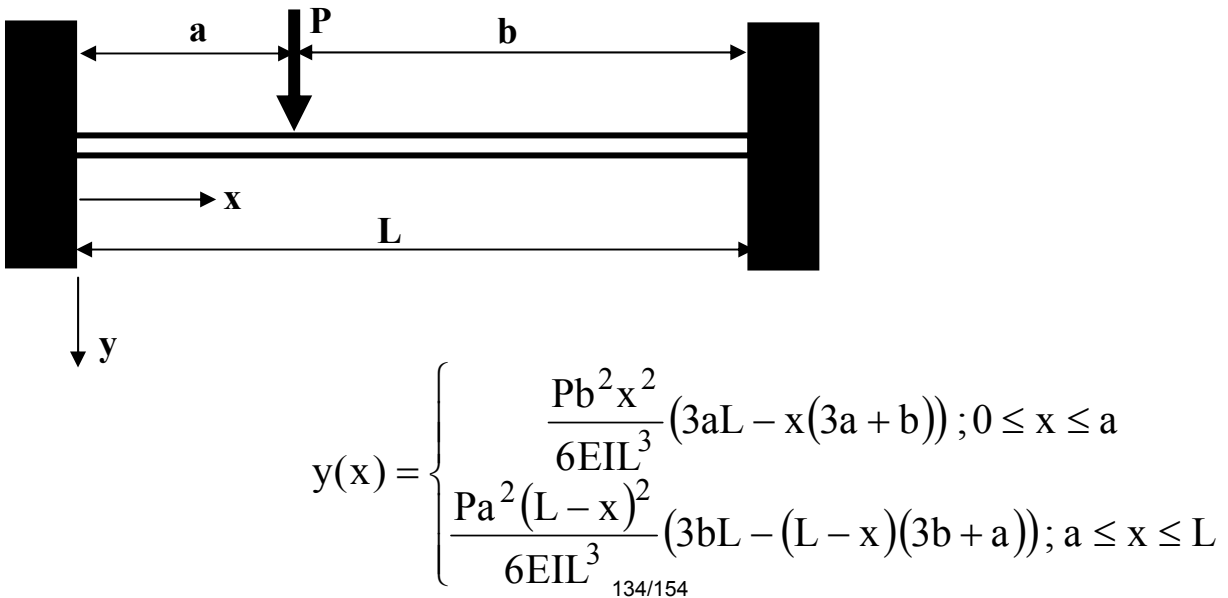
ANKASTRE KİRİŞ:



BASİT MESNETLİ KİRİŞ:



ANKASTRE-ANKASTRE KİRİŞ:



Basit mesnetli kiriş için verilen çökme ifadeleri kullanılarak

a_{11} için $a=L/4$, $b=3L/4$ ve $x=L/4$ 'dür. $P=1$ için,

$$y(L/4) = a_{11} = \frac{3 \frac{L}{4} \frac{L}{4}}{6EIL} \left(L^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 - \left(3 \frac{L}{4} \right)^2 \right) = \frac{3 \frac{L^2}{16}}{6EIL} \left(L^2 - \frac{L^2}{16} - 9 \frac{L^2}{16} \right) = \frac{3L}{96EI} \left(\frac{6L^2}{16} \right) = \frac{9}{768} \frac{L^3}{EI}$$

a_{21} için $a=L/4$, $b=3L/4$ ve $x=L/2$ 'dür. $P=1$ için,

$$y(L/2) = a_{21} = a_{12} = \frac{\frac{L}{4} \left(L - \frac{L}{2} \right)}{6EIL} \left(2L \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right) = \frac{\frac{L^2}{8}}{6EIL} \left(L^2 - \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right) = \frac{L}{48EI} \left(\frac{11L^2}{16} \right) = \frac{11}{768} \frac{L^3}{EI}$$

a_{31} için $a=L/4$, $b=3L/4$ ve $x=3L/4$ 'dür. $P=1$ için,

$$y(3L/4) = a_{31} = a_{13} = \frac{\frac{L}{4} \left(L - \frac{3L}{4} \right)}{6EIL} \left(2L \frac{3L}{4} - \left(\frac{3L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right) = \frac{\frac{L^2}{16}}{6EIL} \left(\frac{3L^2}{2} - \frac{9L^2}{16} - \frac{L^2}{16} \right) = \frac{L}{96EI} \left(\frac{14L^2}{16} \right) = \frac{7}{768} \frac{L^3}{EI}$$

a_{22} için $a=L/2$, $b=L/2$ ve $x=L/2$ 'dir. $P=1$ için,

$$y(L/2) = a_{22} = \frac{\frac{L}{2} \frac{L}{2}}{6EIL} \left(L^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) = \frac{\frac{L^2}{4}}{6EIL} \left(L^2 - \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4} \right) = \frac{L}{24EI} \left(\frac{L^2}{2} \right) = \frac{1}{48} \frac{L^3}{EI} = \frac{16}{768} \frac{L^3}{EI}$$

a_{33} için $a=3L/4$, $b=L/4$ ve $x=3L/4$ 'dür. $P=1$ için,

$$y(L) = a_{33} = \frac{\frac{L}{4} \frac{3L}{4}}{6EIL} \left(L^2 - \left(\frac{3L}{4} \right)^2 - \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right) = \frac{3 \frac{L^2}{16}}{6EIL} \left(L^2 - \frac{9L^2}{16} - \frac{L^2}{16} \right) = \frac{3L}{96EI} \left(\frac{6L^2}{16} \right) = \frac{9}{768} \frac{L^3}{EI}$$

Esneklik matrisi

$$[a] = \frac{L^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Dirençlilik veya Esneklik matrisi oluşturulduktan sonra çok serbestlik dereceli bir sistemin doğal frekansları

$\det[k] - \omega^2 [m] = 0$ veya $\det[I] - \omega^2 [k]^{-1} [m] = 0 \rightarrow \det \left[-\frac{1}{\omega^2} [I] + [a] [m] \right] = 0$ bağıntıları ile hesaplanabilir.

Yukarıdaki örnekte verilen sisteme ait doğal frekansları elde edelim. Kiriş malzemesi çelik $E=2.1 \times 10^{11}$, kiriş boyutları $20 \times 10 \times 1000$ (mm), kiriş üzerindeki kütle değerleri $m_1=2$ kg, $m_2=4$ kg, $m_3=1$ kg olarak alınır ise kirşe ait esneklik matrisi

$$[a] = \frac{1^3}{768 * 2.1 \times 10^{11} * \frac{0.02 * 0.01^3}{12}} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} = 1 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.3348 & 0.4092 & 0.2604 \\ 0.4092 & 0.5952 & 0.4092 \\ 0.2604 & 0.4092 & 0.3348 \end{bmatrix}$$

Kiriş-kütle sistemine ait kütle matrisi (kiriş kütlesi ihmal edilerek)

$$m = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Doğal frekanslar için

$$\det \left| -\frac{1}{\omega^2} [I] + [a][m] \right| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 0.0670 \times 10^{-3} - \frac{1}{\omega^2} & 0.1637 \times 10^{-3} & 0.0260 \times 10^{-3} \\ 0.0818 \times 10^{-3} & 0.2381 \times 10^{-3} - \frac{1}{\omega^2} & 0.0409 \times 10^{-3} \\ 0.0521 \times 10^{-3} & 0.1637 \times 10^{-3} & 0.0335 \times 10^{-3} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega_1 = 55.542 \text{ rad/sn} \Rightarrow f_1 = 8.839 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 298.234 \text{ rad/sn} \Rightarrow f_2 = 47.465 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = 562.113 \text{ rad/sn} \Rightarrow f_3 = 89.463 \text{ Hz}$$

MEKANİK TİTREŞİMLER

DUNKERLEY METODU

Çok serbestlik dereceli sistemlerin 1. doğal frekansı, sistemi oluşturan her bir serbestlik derecesine ait doğal frekanslar cinsinden yaklaşık olarak ifade edilebilmektedir. Dunkerley tarafından verilen bu formülasyon ilk doğal frekans için gerçek doğal frekans değerinden küçük yaklaşık bir değer vermektedir.

n serbestlik dereceli bir sistem için doğal frekans ifadesi esneklik matrisi kullanılarak şu şekilde verilmiş idi,

$$\left| -\frac{1}{\omega^2} [I] + [a][m] \right| = 0$$

$$\left| -\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{11}m_1 \right) & a_{12}m_2 & \cdots & a_{1n}m_n \\ a_{21}m_1 & \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{22}m_2 \right) & \cdots & a_{2n}m_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & \cdots & \left(-\frac{1}{\omega^2} + a_{nn}m_n \right) \end{array} \right) = 0$$

Bu determinant alınır ise

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^n - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-1} + (a_{11}a_{22}m_1m_2 + a_{11}a_{33}m_1m_3 + \cdots + a_{n-1}a_{n-1}a_{nn}m_{n-1}m_n) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-2} - \cdots = 0 \quad (1)$$

Görüldüğü gibi determinant alındığında $\frac{1}{\omega^2}$ 'nin n. dereceden bir polinomu elde edilmektedir.

Dolayısı ile bu polinom, polinomun kökleri $\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\omega_n^2}$ cinsinden şu şekilde yazılabilir.

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_n^2}\right) = \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1} - \cdots = 0 \quad (2)$$

Denklem 1 ve Denklem 2'deki $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{n-1}$ 'in katsayıları eşitlenir ise

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \quad (3)$$

Birçok sistemde yüksek dereceli doğal frekanslar 1. doğal frekanstan önemli ölçüde büyüktür. Bu durumda

$$\frac{1}{\omega_i^2} \ll \frac{1}{\omega_1^2}, \quad i=2,3,\dots,n$$

Bu durumda Denklem 3 yaklaşık olarak şu şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \quad (4)$$

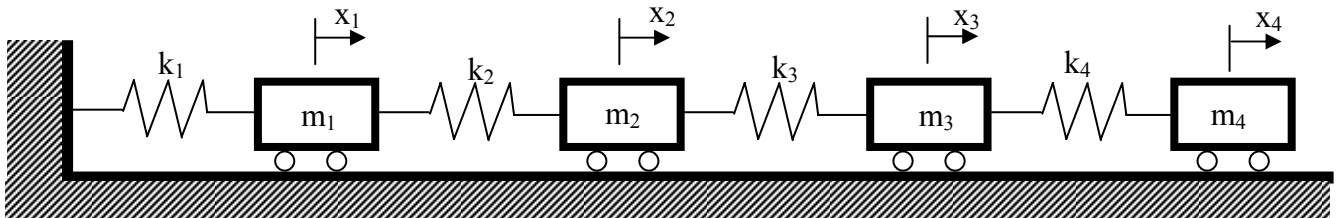
Bu denklem Dunkerley formülü olarak bilinir. Denklem 4 ile elde edilen doğal frekans daima gerçek değerden daha düşüktür. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$\frac{1}{\omega_1^2} \cong \frac{1}{\omega_{1n}^2} + \frac{1}{\omega_{2n}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2}$$

Burada $\omega_{in} = \sqrt{\frac{1}{a_{ii}m_i}} = \sqrt{\frac{k_{ii}}{m_i}}$ m_i kütlesi ve k_{ii} ($i=1,2,\dots,n$) direngenliğine sahip tek serbestlik dereceli sistemin doğal frekansını vermektedir.

Örnek:

Şekilde verilen mekanik sistemin 1. doğal frekansını yaklaşık olarak hesaplayınız. Gerçek değer ile karşılaştırınız.



$$m_1=100 \text{ kg}, m_2=80 \text{ kg}, m_3=120 \text{ kg}, m_4=40 \text{ kg}$$

$$k_1=10000 \text{ N/m}, k_2=5000 \text{ N/m}, k_3=4000 \text{ N/m}, k_4=1000 \text{ N/m}.$$

Enerji yöntemi ile sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

```

clc
clear

m1=100;
m2=80;
m3=120;
m4=40;

k1=10000;
k2=5000;
k3=4000;
k4=1000;

M=[m1 0 0 0;0 m2 0 0;0 0 m3 0;0 0 0 m4]
K=[k1+k2 -k2 0 0;-k2 k2+k3 -k3 0;0 -k3 k3+k4 -k4;0 0 -k4 k4]

syms s;
mat=M*s^2+K;
pol=det(mat);
p=solve(pol);
vpa(p,8)

```

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 2.931 \text{ rad/sn} \\ \omega_{n2} &= 5.801 \text{ rad/sn} \\ \omega_{n3} &= 9.628 \text{ rad/sn} \\ \omega_{n4} &= 13.935 \text{ rad/sn} \end{aligned}$$

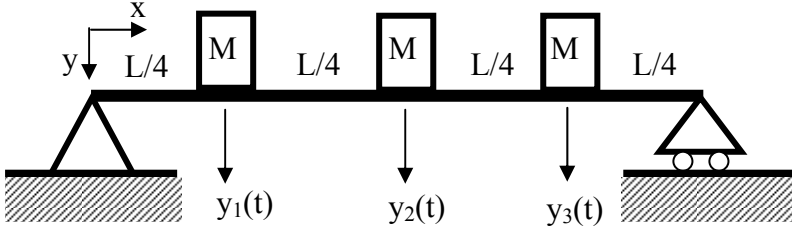
$$a = k^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.00055 & 0.00055 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.00055 & 0.00155 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + a_{33}m_3 + a_{44}m_4 = 0.0001*100 + 0.0003*80 + 0.00055*120 + 0.00155*40$$

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = 0.162 \rightarrow \omega_{n1} = 2.485 \text{ rad/sn.}$$

Örnek:

Şekilde verilen kiriş kütle sisteminin 1. doğal frekansını yaklaşık olarak hesaplayınız. Kiriş kütlesi ihmal edilecektir.



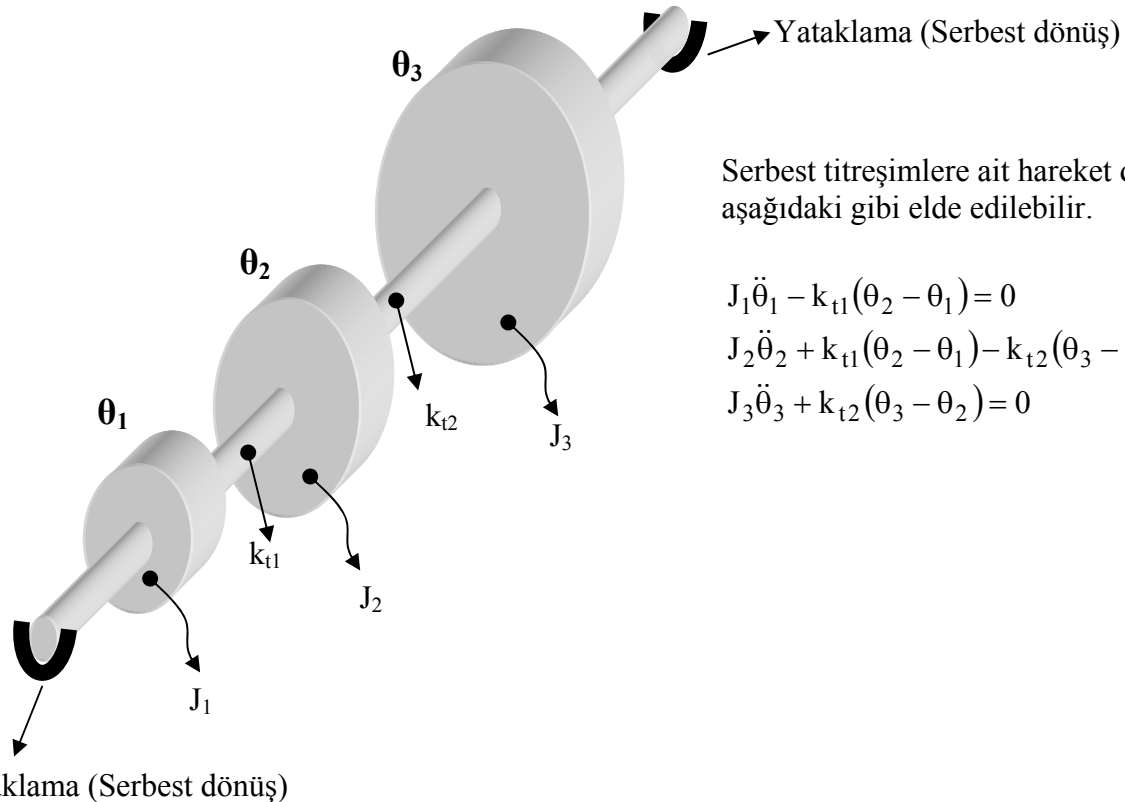
$$a_{11} = \frac{3L^3}{256EI}, \quad a_{22} = \frac{L^3}{48EI}, \quad a_{33} = \frac{3L^3}{256EI} \text{ olarak hesaplanabilir.}$$

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = a_{11}M_1 + a_{22}M_2 + a_{33}M_3 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})M$$

$$\frac{1}{\omega_{n1}^2} = \left(\frac{3}{256} + \frac{1}{48} + \frac{3}{256} \right) \frac{ML^3}{EI} = 0.04427 \frac{ML^3}{EI} \rightarrow \omega_{n1} = 4.753 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \text{ (rad/sn)}$$

HOLZER METODU

Holzer metodu çok serbestlik dereceli sistemlerin doğal frekanslarını ve mod şekillerini hesaplamak için kullanılabilen nümerik bir yöntemdir.



Serbest titreşimlere ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 - k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0$$

Doğal titreşimlerin formu harmoniktir.

$$\theta_i = \theta_i \cos(\omega_i t + \phi)$$

$$\ddot{\theta}_i = -\omega^2 \theta_i \cos(\omega_i t + \phi)$$

$$-\omega^2 J_1 \theta_1 - k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$\omega^2 J_1 \theta_1 = -k_{t1}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$-\omega^2 J_2 \theta_2 + k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0 \rightarrow \omega^2 J_2 \theta_2 = k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t2}(\theta_3 - \theta_2)$$

$$-\omega^2 J_3 \theta_3 + k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0$$

$$\omega^2 J_3 \theta_3 = k_{t2}(\theta_3 - \theta_2)$$

$$\omega^2 J_1 \theta_1 + \omega^2 J_2 \theta_2 + \omega^2 J_3 \theta_3 = -\cancel{k_{t1} \theta_2} + \cancel{k_{t1} \theta_1} + \cancel{k_{t1} \theta_2} - \cancel{k_{t1} \theta_1} - \cancel{k_{t2} \theta_3} + \cancel{k_{t2} \theta_2} + \cancel{k_{t2} \theta_3} - \cancel{k_{t2} \theta_2}$$

$$\sum_{i=1}^3 \omega^2 J_i \theta_i = 0$$

Holzer metodu yukarıdaki denklemin sağlanmasıdır. Holzer metodunda başlangış olarak bir ω değeri kabul edilir ve $\theta_1=1$ kabul edilerek iterasyon başlatılır. Daha sonra θ_2 birinci diferansiyel denklemden, θ_3 ise ikinci diferansiyel denklemden elde edilir.

$$\theta_1 = 1$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\omega^2 J_1 \theta_1}{k_{t1}} \quad (1. \text{ denklemden})$$

$$\theta_3 = \theta_2 - \frac{\omega^2}{k_{t2}} (J_1 \theta_1 + J_2 \theta_2) \quad (2. \text{ denklemden}) \quad k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) = -\omega^2 J_1 \theta_1$$

Bu denklemler n adet disk içeren bir sistem için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{t_{i-1}}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} J_k \theta_k \right) \quad i=2,3,\dots,n.$$

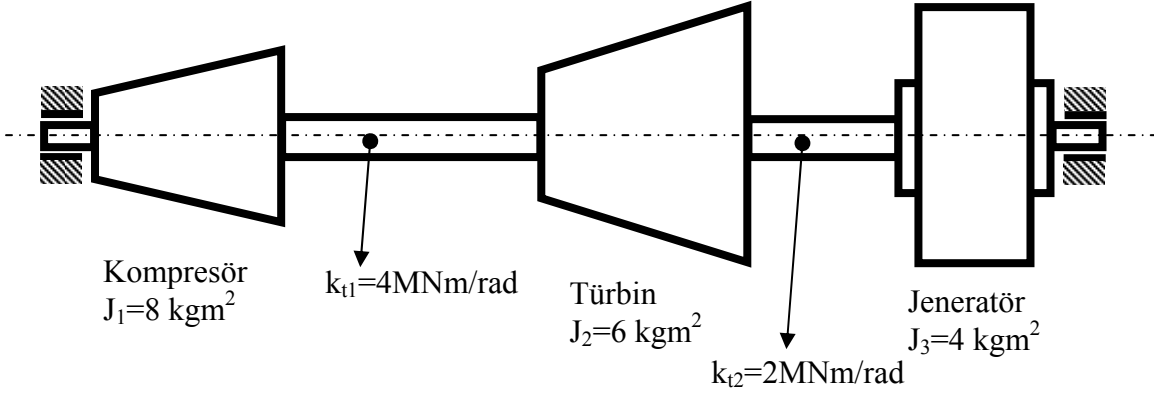
İterasyon yapılır iken sağlanması gerekli denklem

$$\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i \theta_i = 0$$

Bu denklemi sağlayan θ 'lar mod şekillerini vermektedir.

Örnek:

Şekilde verilen şaft disk sistemi için doğal frekansları Holzer metodu ile hesaplayınız.



Problemin çözümü aşağıdaki Visual Basic programı ile gerçekleştirilebilir.

```

Private Sub Command1_Click()
j1 = 8
j2 = 6
j3 = 4
kt1 = 4000000
kt2 = 2000000

Dim w, toplam As Double
Dim tet1, tet2, tet3, h As Double

tet1 = 1
h = 500

wson = 2000

Picture1.Scale (0, 10000000)-(wson, -10000000)
Picture1.Line (0, 0)-(wson, 0)

For w = 500 To wson Step 0.05

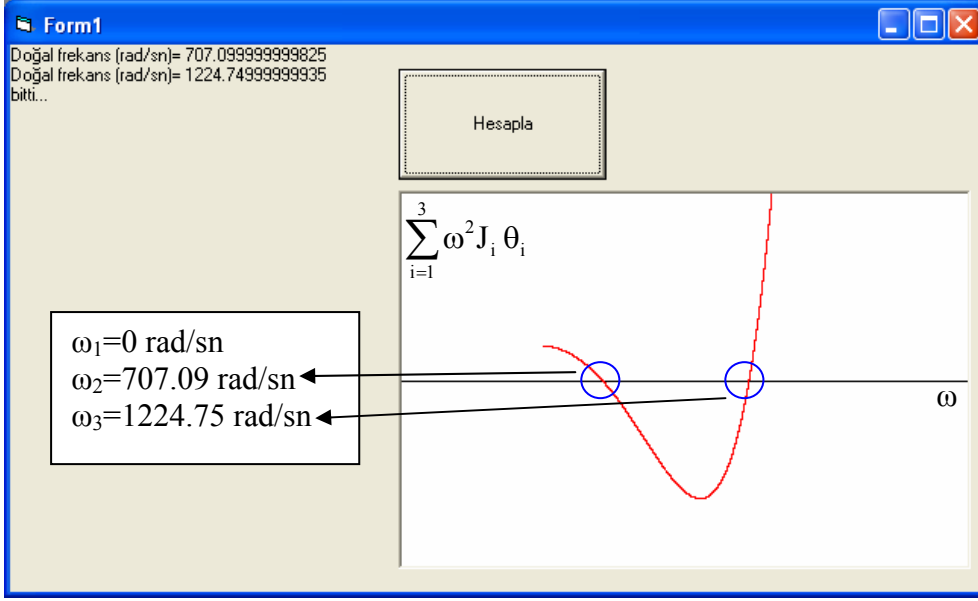
tet2 = tet1 - (w ^ 2 / kt1) * (j1 * tet1)
tet3 = tet2 - (w ^ 2 / kt2) * (j1 * tet1 + j2 * tet2)

toplam = w ^ 2 * j1 * tet1 + w ^ 2 * j2 * tet2 + w ^ 2 * j3 * tet3
'Print "toplam="; toplam

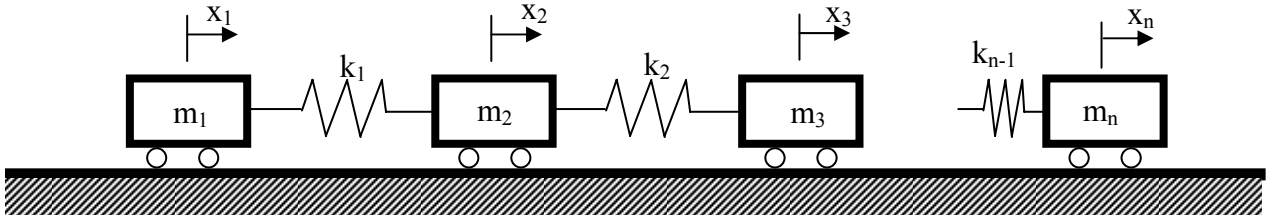
If Abs(toplam) <= h Then
Print "Doğal frekans (rad/sn)="; w
End If

Picture1.PSet (w, toplam), RGB(255, 0, 0)
Next w
Print "Bitti..."
End Sub

```



Holzer metodu ile kütle-yay sistemleri için de doğal frekanslar benzer şekilde hesaplanabilir.



$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 m_1 X_1}{k_1}$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2} (m_1 X_1 + m_2 X_2)$$

⋮

$$X_i = X_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} m_j X_j \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Viskoz Sönümlü Sistemlerde Enerji Yutumu:

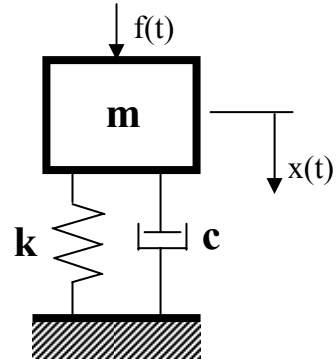
Harmonik hareket yapan vizkoz sönümlü bir mekanik sistemde 1 çevrimde (tam hareket) yutulan enerji aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. X harmonik titreşim genliği ve ω ise titreşim frekansı olmak üzere

$$x(t) = X \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = \omega X \cos \omega t$$

Viskoz sönüm elemanı nedeni ile 1 çevrimde yutulan enerji

$$\Delta E = \int_{t=0}^{2\pi/\omega} F_d \dot{x} dt$$



$$\Delta E = \int_{t=0}^{2\pi/\omega} c \dot{x} \dot{x} dt = \int_{t=0}^{2\pi/\omega} c \omega X \cos \omega t \omega X \cos \omega t dt = \int_{t=0}^{2\pi/\omega} c \omega^2 X^2 \cos^2 \omega t dt = c \omega^2 X^2 \int_{t=0}^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = c \omega^2 X^2 \frac{\pi}{\omega} = \pi c \omega X^2$$

Bir sistemin sönüm oranı sistemin farklı frekanslardaki harmonik zorlamalara cevabı kullanılarak elde hesaplanabilir. Bir sistemin frekans cevabındaki en büyük genlik değeri H_R Quality Factor, Q (Kalite Faktörü) olarak adlandırılır. Sistemin sönüm oranı Yarı Güç Noktası olarak (Half Power Point) adlandırılan (Frekans cevabındaki Maksimum Genliğin 3 dB ($0.707 \cdot H_R$) düştüğü noktadaki frekans değerleri ile elde edilebilir.

Yukarıda verilen mekanik sistemde $m=20$ kg, $c=3000$ Ns/m ve $k=98$ N/m olarak alınır ise hareket denklemi

$$20\ddot{x} + 98\dot{x} + 3000x = f(t)$$

Sistemin sönüm oranı

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{98}{2\sqrt{3000 \cdot 20}} = 0.2 \text{ dir. Bu değeri Half power yöntemi ile elde etmeye çalışalım.}$$

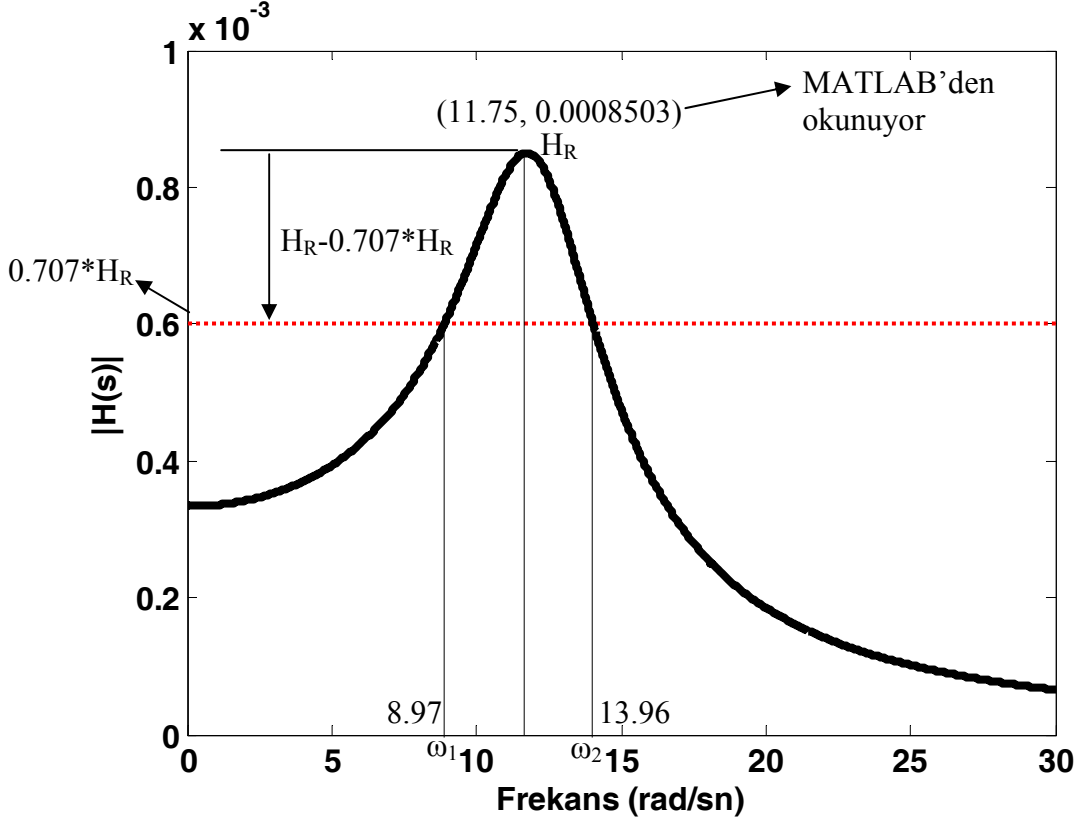
$$\Delta E_{0.707} = \pi c \omega (0.707X)^2 = 0.5 \pi c \omega X^2 = 0.5 \Delta E$$

Mekanik sistemin transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{1}{20s^2 + 98s + 3000}$$

Sistemin sönümsüz doğal frekansı $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3000}{20}} = 12.247 \text{ rad/sn}$

Frekans cevabındaki maksimum genlik 0.0008503 ve bu genliğin okunduğu frekans değeri 11.73 rad/sn dir.



Düşük sönümlü sistemler için

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \cong 2\zeta\omega_n \text{ dir.}$$

$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{13.93 - 8.97}{2 * 12.247} = 0.202$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi bu değer sistemin gerçek sönüm oranına çok yakın bir değerdir.

Sürekli Sistemlerin Doğal Frekanslarının Enerji Yöntemi İle Elde Edilmesi:

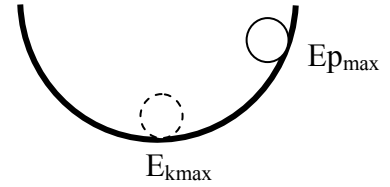
Kiriş benzeri sürekli (continuous) yapıların doğal frekansları enerji yöntemi ile hesaplanabilir. Daha önceki konularda efektif kütle yöntemi ile, incelenen sürekli sistemlere ait 1. doğal frekanslar yaklaşık olarak elde edilmiş idi. Burada kiriş benzeri yapılara ait doğal 1. doğal frekans hesabı için yine enerji yöntemi kullanılarak sonuca ulaşılabilecektir.

Ele alınan ankastre bir kiriş için 1. doğal frekans değerini enerji yöntemi ile hesaplayalım. Sönümsüz bir sistem için, enerjinin korunumu prensibi ile sistemin potansiyel ve kinetik enerji toplamları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

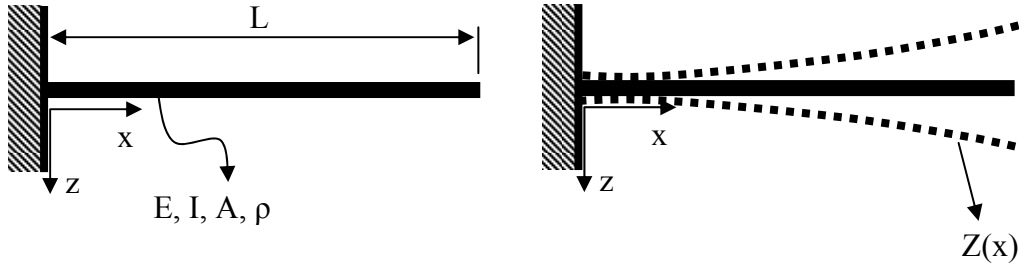
$$E_{k_{\max}} + E_{p_{\min}} = E_{k_{\min}} + E_{p_{\max}}$$

Salınım yapan bir sistem için sistemin kinetik enerjisi en büyük değerini aldığı anda potansiyel enerji sıfırdır. Potansiyel enerjinin en büyük olduğu durum için ise kinetik enerji sıfırdır. Dolayısı ile ankastre kirişin maksimum kinetik enerjisi ile maksimum potansiyel enerji değerleri birbirine eşittir.

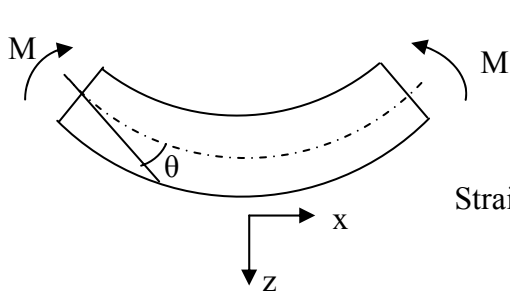
$$E_{k_{\max}} = E_{p_{\max}}$$



Ele alınan ankastre kiriş için eksen takımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Sabit kesitli ankastre kiriş için potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri şu şekilde yazılabilir.



$$\theta = \frac{dz}{dx} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$\text{Strain enerji} \quad dU = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad M^2 = (EI)^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{Sabit kesitli bir kiriş için} \quad U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)^2 dx \quad \text{olarak yazılabilir.}$$

Eğilmeye titreşimlerine maruz sabit kesitli homojen bir kiriş için potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 dx$$

Ankastre bir kirişin doğal titreşimine ait ifade şu şekilde yazılabilir.

$$z(t, x) = Z(x) \sin \omega t$$

Potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinde kullanılmak üzere

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 Z}{dx^2} \sin \omega t, \quad \frac{dz}{dt} = \omega Z \cos \omega t$$

yazılabilir. Potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinin en büyük değerleri eşitlenir ise

$$\frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \sin \omega t \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\omega Z \cos \omega t)^2 dx$$

yazılabilir. Sinüs ve Cosinüs terimlerinin en büyük değerlerinin 1 olduğu dikkate alınır ise

$$\int_0^L EI \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \right)^2 dx = \omega^2 \int_0^L \rho A Z^2 dx$$

elde edilir ve ankastre kiriş için doğal frekans ifadesi

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho A Z^2 dx}$$

Doğal frekans ifadesine ulaşmak için ankastre kirişe ait yer değiştirme eğrisi x 'e bağlı dördüncü dereceden bir polinom ile şu şekilde ifade edilebilir. Yazılan yer değiştirme ifadesinin sınır şartlarını sağlaması gereklidir.

$$Z(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + dx + e$$

Ankastre bir kiriş için sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$x=0'da Z(x=0)=0 \text{ ve } \frac{dZ}{dx} = 0, \quad x=L'de \frac{d^2Z}{dx^2} = 0 \text{ ve } \frac{d^3Z}{dx^3} = 0$$

Sınır şartları kullanarak yer değiştirme eğrisi içerisindeki katsayılar şu şekilde elde edilebilir.

$$b = -4aL, \quad c = 6aL^2, \quad d = 0, \quad e = 0$$

Bu katsayılar yerine konarak kiriş için yer değiştirme eğrisi şu şekilde yazılabilir.

$$Z(x) = a(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

Bu sonuç doğal frekans ifadesinde kullanılır ise

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^L \left(\frac{d^2Z}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho A \int_0^L Z^2 dx} = \frac{EI \int_0^L [a(12x^2 - 24Lx + 12L^2)]^2 dx}{\rho A \int_0^L [a(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)]^2 dx}$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^L a(144x^4 - 576Lx^3 + 864L^2x^2 - 576L^3x + 144L^4) dx}{\rho A \int_0^L (x^8 - 8Lx^7 + 28L^2x^6 - 48L^3x^5 + 36L^4x^4) dx}$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI \frac{144}{5} L^5}{\rho A \frac{104}{45} L^9} = 12.4615 \frac{EI}{\rho AL^4}$$

$\rho AL = m_{\text{kiriş}}$ olduğu dikkate alınarak ankastre kiriş için doğal frekans ifadesi

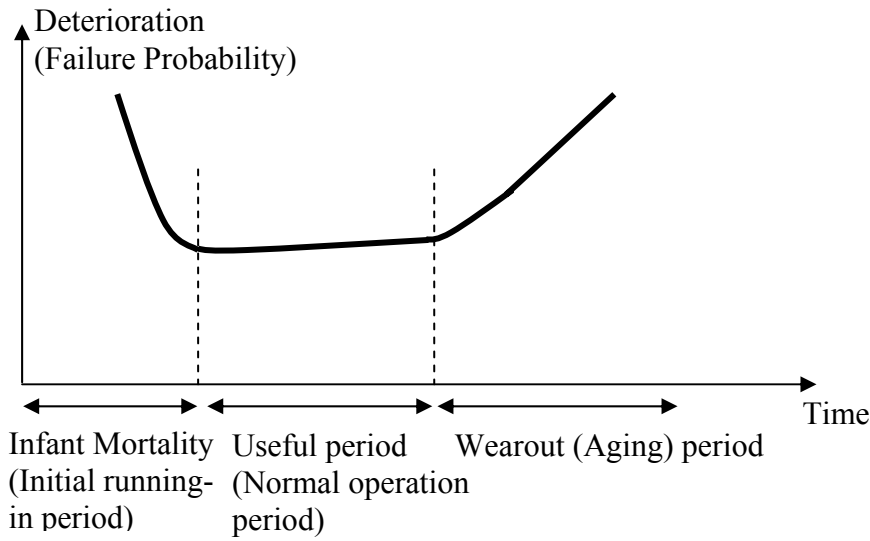
$$\omega_n^2 = 12.4615 \frac{EI}{\rho AL^4} = 12.4615 \frac{EI}{m_{\text{kiriş}} L^3} \rightarrow \omega_n = 3.530 \sqrt{\frac{EI}{m_{\text{kiriş}} L^3}} \text{ (rad/sn)}$$

olarak elde edilir. Sürekli sistem yaklaşımı kullanıldığı için bu frekans ifadesi tek serbestlik dereceli sistem kabulü ile elde edilen değerden daha doğru cevabı verecektir.

MAKİNALARDA DURUM İZLEME VE ARIZA TEŞHİSİ (CONDITION MONITORING AND FAULT DIAGNOSTICS)

Uygun bir tasarıma sahip pek çok makine çalışma durumunda düşük titreşim seviyelerine sahiptir. Operasyon halinde makinelerde yorulma, aşınma, deformasyon, taban oturması, gevşeme gibi durumlar oluşabilir. Bu etkiler makinelerdeki boşlukların artmasına, eksen kaçıklıklarının oluşmasına, dengesizliklere, çatlak başlangıçlarına vb. sebep olur. Tüm bu etkiler makinelerde zaman içerisinde titreşim seviyelerinin artmasına neden olur. Aşırı titreşimler yataklarda ek dinamik kuvvetler oluşturur ve zaman içerisinde titreşim seviyeleri giderek artar. Sonuç olarak makinelerde kopma, kırılma benzeri durumlar ortaya çıkar ve makine devre dışı kalır. Bu durum bazen insan hayatını tehlikeye sokacak nitelik taşıyabilir.

Bir makinenin ömrü klasik olarak BATHTUB eğrisi ile ifade edilir.



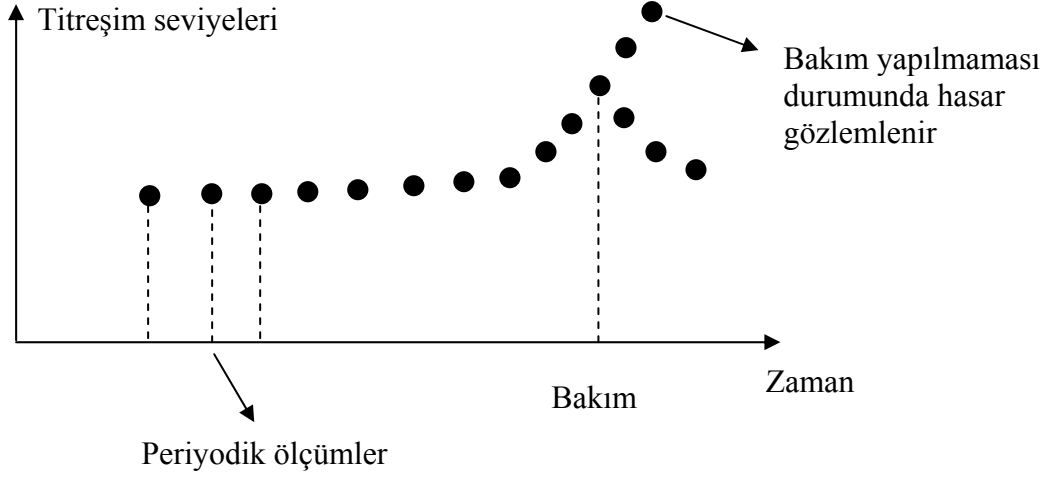
Makinelerdeki arızalar titreşim ve ses seviyeleri ile ilişkili olduğundan, titreşim seviyeleri BATHTUB eğrisine uygun olarak değişim gösterir. Makinelerde ilk çalışma zamanlarında, temas eden yüzeylerin birbirlerine alışması (yüzey düzgünsüzlükleri nedeni ile sürtünmeler) sırasında titreşim seviyeleri yüksek olarak izlenebilir. Daha sonra normal çalışma periyodunda titreşim seviyeleri düşüş gösterir, fakat oluşan aşınmalar dolayısı ile normal çalışma periyodunun sonlarına doğru titreşim seviyelerinde artış gözlemlenir. Aşınmaların zaman içerisinde artması dolayısı ile wearout periyodunda makinede kalıcı hasarlar gözlemlenebilir.

Bir makine için makine sağlığını takip etmek için temel olarak üç farklı yöntem bulunmaktadır.

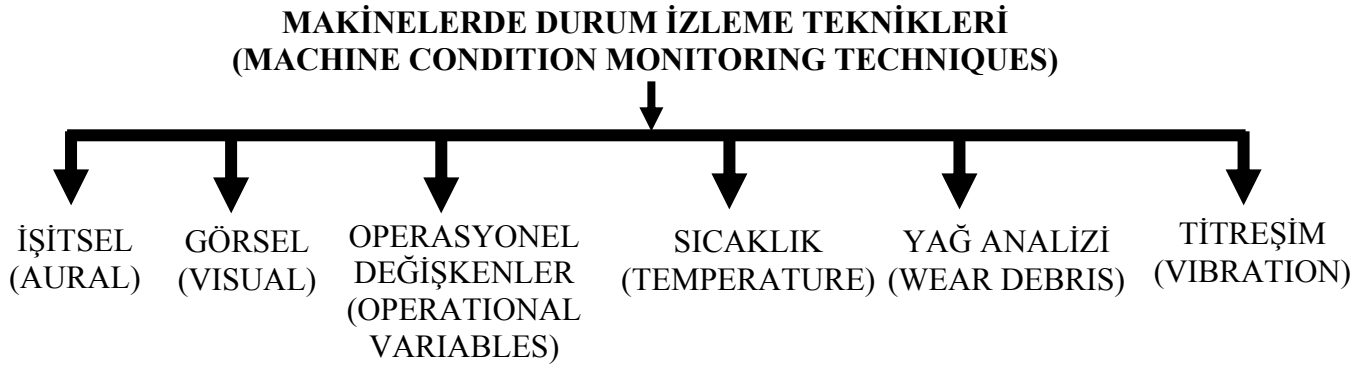
- 1. Breakdown Maintenance:** Makinenin çalışması sırasında durum tespitine yönelik bir çalışma yapılmaz, makinede de arıza olduğunda yenisi ile değiştirilir. Düşük bedelli makineler için bu yöntem uygun olabilir.
- 2. Preventive Maintenance:** Belirli periyotlar ile makine bakımı yapılır. Kontroller sırasında makine durdurulur ve makinenin durumu incelenir. Duruşlar nedeniyle üretim kayıpları söz konusudur ve verimli bir yöntem değildir.
- 3. Condition-Based Maintenance:** Bu yöntemde belirli periyotlar ile bakım yerine ölçümler yapılır. Bu ölçümler ile makinenin durumu izlenir. Arıza başlangıçları bu şekilde tespit

edilebilir. Makine duruşları olmadığından üretim aksamaz. Periyodik olarak ölçülen titreşim seviyelerinden yola çıkılarak makinede ne zaman arıza olacağı kestirilebilir. Bu nedenle bu yaklaşıma Kestirimci Bakım (Predictive Maintenance) adı da verilir. Bu yöntemde bakım masrafları düşüktür ve makinede kontrolsüz ani arızalar gözlemlenmez.

Durum Esaslı Bakım (Condition Based Maintenance) ile makinede ölçülen titreşim seviyeleri aşağıdaki eğriye benzer.



Makinelere durum izleme (Condition Monitoring) çalışmaları şu yöntemler ile yapılmaktadır.



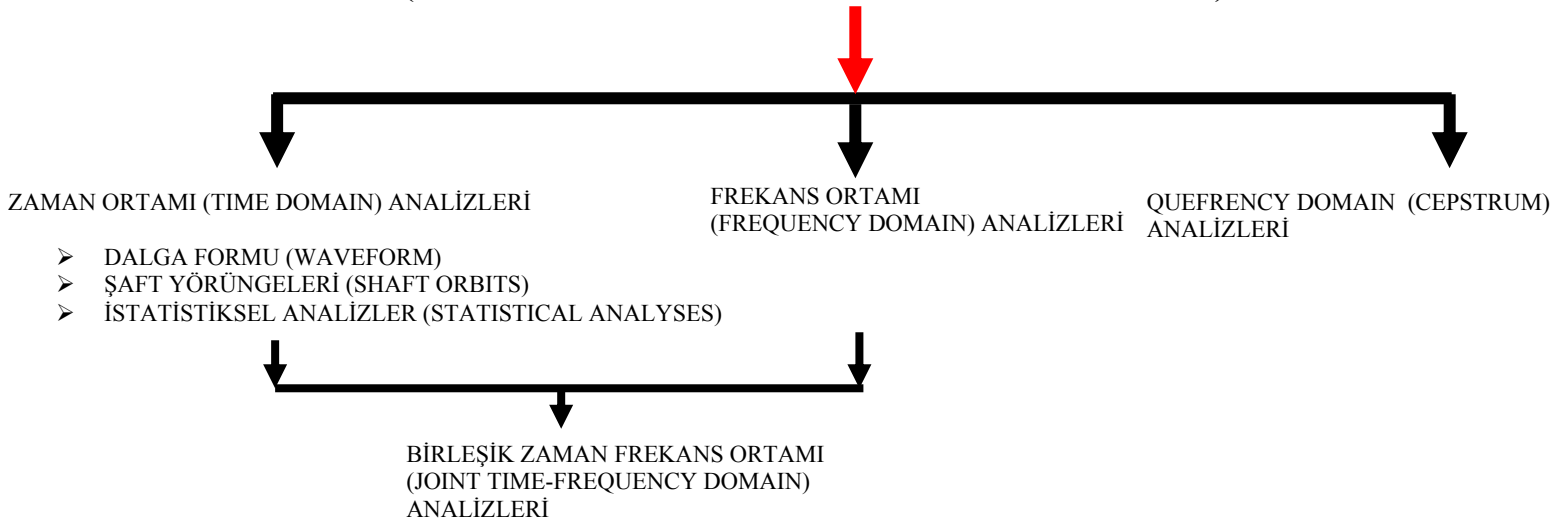
Titreşim analizi makinelerin durum izleme çalışmalarında günümüzde en çok kullanılan yöntemdir. Titreşim analizinde temel aşamalar, makinelerin uygun bölgelerinden titreşim sinyali alma, bu sinyali farklı yöntemlerle işleme ve elde edilen sonuçları arıza varlığı veya yokluğu açısından yorumlamaktır. Makinelerin izin verilebilir titreşim seviyeleri ISO 2372 standardı ile verilmiştir.

ISO 2372 (10816) Standards provide guidance for evaluating vibration severity in machines operating in the 10 to 200 Hz (600 to 12,000 RPM) frequency range. Examples of these types of machines are small, direct-coupled, electric motors and pumps, production motors, medium motors, generators, steam and gas turbines, turbo-compressors, turbo-pumps and fans. Some of these machines can be coupled rigidly or flexibly, or connected through gears. The axis of the rotating shaft may be horizontal, vertical or inclined at any angle. Use the chart below combined with additional factors described in this manual to judge the overall vibration severity of your equipment.

VIBRATION SEVERITY PER ISO 10816					
Machine		Class I small machines	Class II medium machines	Class III large rigid foundation	Class IV large soft foundation
in/s	mm/s				
Vibration Velocity Vrms	0.01	0.28			
	0.02	0.45			
	0.03	0.71		good	
	0.04	1.12			
	0.07	1.80			
	0.11	2.80		satisfactory	
	0.18	4.50			
	0.28	7.10		unsatisfactory	
	0.44	11.2			
	0.70	18.0			
	0.71	28.0		unacceptable	
	1.10	45.0			

Makinelere titreşim analizi ile durum izleme yöntemleri şu şekilde sınıflandırılabilir.

TİTREŞİM ANALİZİ İLE MAKİNELERDE DURUM İZLEME TEKNİKLERİ (MACHINE VIBRATION MONITORING TECHNIQUES)

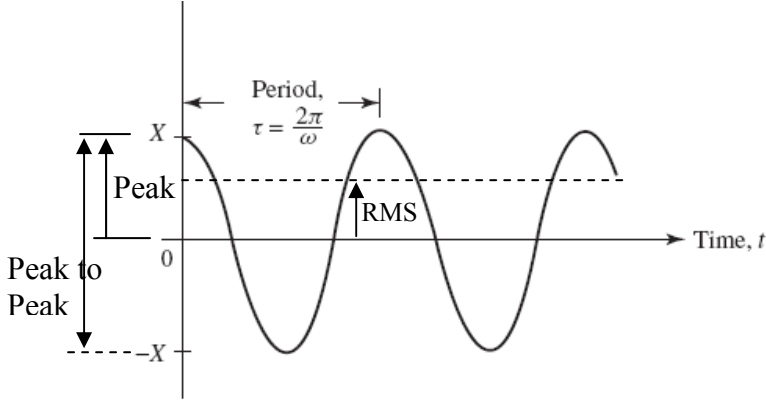


Zaman Ortamı Analizleri:

Dalga Formu : Bu yöntemde titreşim sinyallerinin dalga formunun temel özelliklerine ve sinyal içerisindeki hata göstergesi olacak nitelikteki form bozukluklarına veya genlik artışlarına bakılabilir. Dalga formu incelenir iken sinyale ait bazı büyüklükler karşılaştırılır.

Harmonik bir sinyal için bu bilgiler şunlar olabilir.

Yer değiştirme, hız, ivme

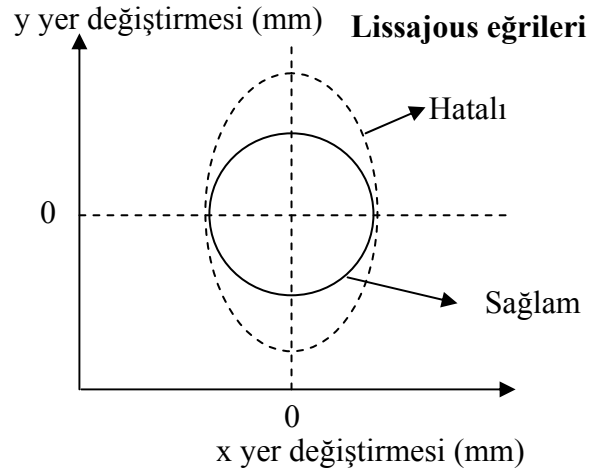
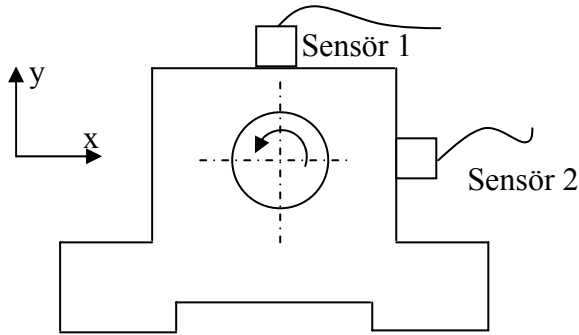


Harmonik bir sinyal için RMS

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x^2 dt} = \frac{\text{Peak}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Crest Factor} = \frac{\text{Peak to peak}}{\text{RMS}}$$

Şaft Yörüngeleri: Bu yöntemde şaft yörüngesindeki sapmalara bakılarak arıza mevcudiyeti hakkında yargıya varılır.



İstatistiksel Analizler: Bu yöntemde titreşim sinyallerine ait farklı istatistiksel göstergeler kullanılarak, hatasız ve hatalı sinyaller arasındaki farklılıklardan hareketle hata tespiti yapılmaya çalışılır.

Bu istatistiksel göstergeler İstatistiksel Yoęunluk Eğrileri (Probability Density Curve), ve farklı türden momentlerdir. Bu momentlerden bazıları N örneğe sahip bir x titreşim sinyali için aşağıda verilmiştir.

$$\text{mean} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$$

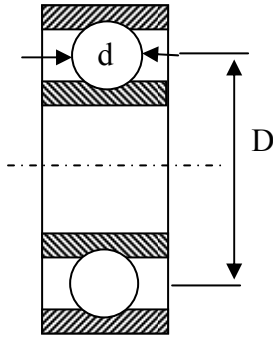
$$\text{Standart Sapma} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{Skewness} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{N \sigma^3}$$

$$\text{Kurtosis} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{N \sigma^4} \rightarrow \text{veya RMS}^4$$

Frekans Ortamı Analizleri:

Bu analizlerde titreşim sinyalinin frekans içeriği Fourier Transformu ile belirlenir ve frekans içeriği içerisinde önceden hesaplanabilen hata frekanslarının olup olmadığı kontrol edilir. Frekans içeriğinde hata frekanslarının mevcudiyeti, incelenen makinede hata olduğunun bir göstergesidir. Bir rulman için bölgesel hatalara ait frekanslar rulman özellikleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.



Z= Bilya sayısı
D=Pitch diameter
D=Bilya çapı
 f_s =Şaft frekansı
 α =Temas açısı

$$C = \frac{d}{D} \cos \alpha$$

$$\text{Kafes frekansı} = f_c = \frac{1}{2} Z f_s (1 + C)$$

$$\text{İç Bilezik Hatası} = f_i = \frac{1}{2} Z f_s (1 + C)$$

$$\text{Dış Bilezik Hatası} = \frac{1}{2} Z f_s (1 - C)$$

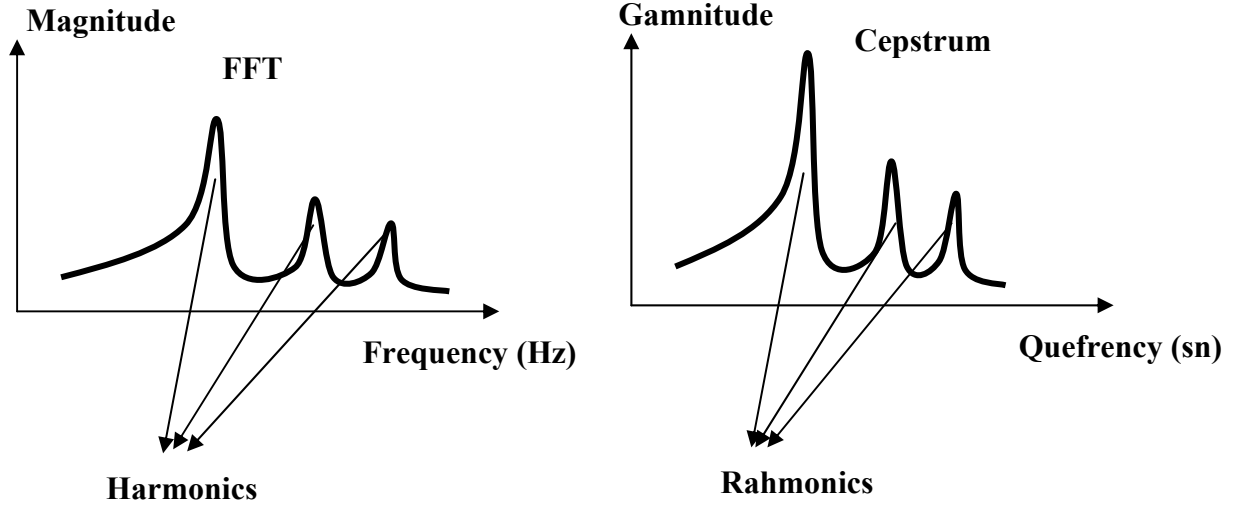
$$\text{Bilya - Masura Hatası} = \frac{D}{d} f_s C (2 - C)$$

Quefreny Domain Analizleri: Bu analiz tipinde titreşim sinyalinin FT (Fourier Transform) dönüşümünün tekrar Fourier dönüşümü alınarak (Cepstrum) elde edilen dönüşüm sinyalleri incelenir.

Bir $x(t)$ sinyalinin Fourier transformu $F\{x(t)\}$ ise, bu sinyalin power spektrumu

$$S_x(\omega) = |F\{x(t)\}|^2 \text{ şeklindedir. Sinyalin Cepstrum'u ise}$$

$$C(\tau) = |F\{\log S_x(\omega)\}|^2 \text{ şeklindedir.}$$



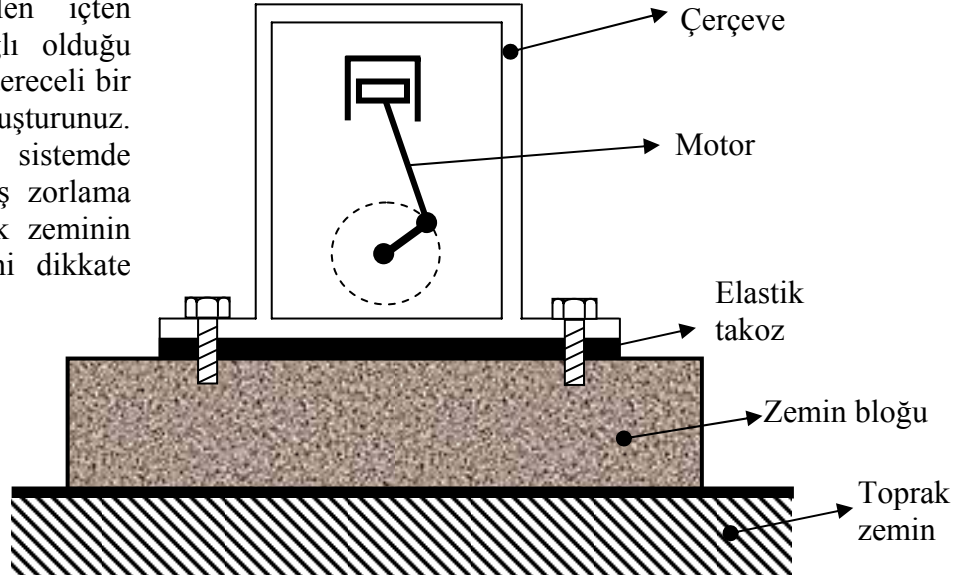
Birleşik Zaman-Frekans Analizleri: Arızalı titreşim sinyalleri genel olarak farklı zamanlarda farklı frekans içeriklerine sahip olan (Non-Stationary) sinyallerdir. Bu sinyallerin sadece frekans ortamında analizleri yapıldığında arızanın titreşim sinyali içerisindeki zaman bilgisi (veya tur bilgisi) elde edilememektedir. Arızanın bir titreşim sinyali içerisindeki zaman bilgisi Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (Short Time Fourier Transform) veya daha gelişmiş olan Wavelet Analizi ile belirlenebilir. Wavelet dönüşümü son yıllarda titreşim sinyallerinin analizinde arıza tespitine yönelik olarak sıklıkla kullanılmaktadır.

ÖRNEK SINAV SORULARI

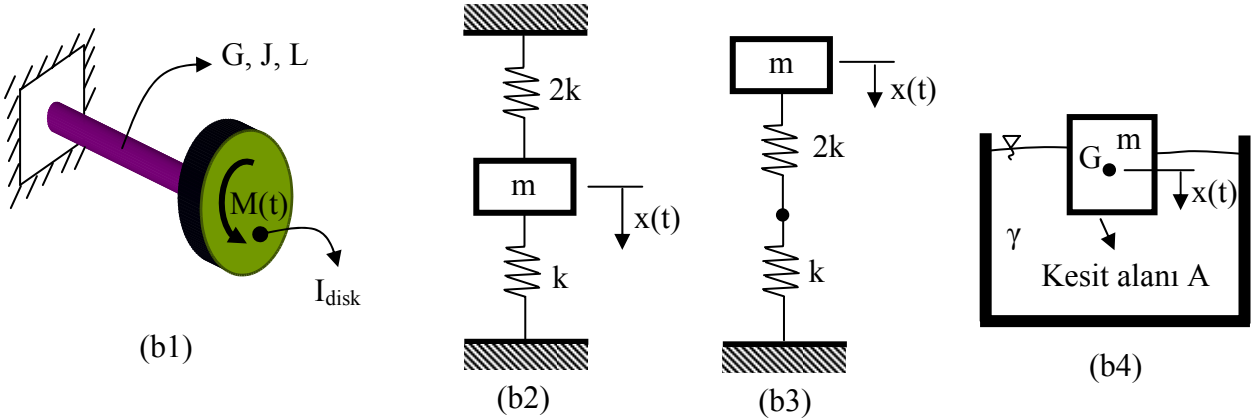
DEÜ MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK TİTREŞİMLER ARASINAV 1-12.11.2008

Ad Soyad	S1	S2	S3	S4	Σ
No					

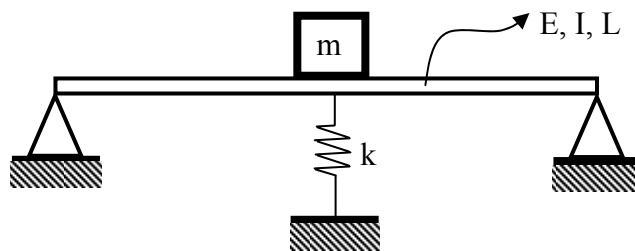
S1. a) Şekilde verilen içten yanmalı motor ve bağlı olduğu sisteme ait iki serbestli dereceli bir matematik model oluşturunuz. İçten yanmalı motor sistemde dengesizlik türünden dış zorlama oluşturmaktadır. (Toprak zeminin sönüm ve direngenliğini dikkate alınız).



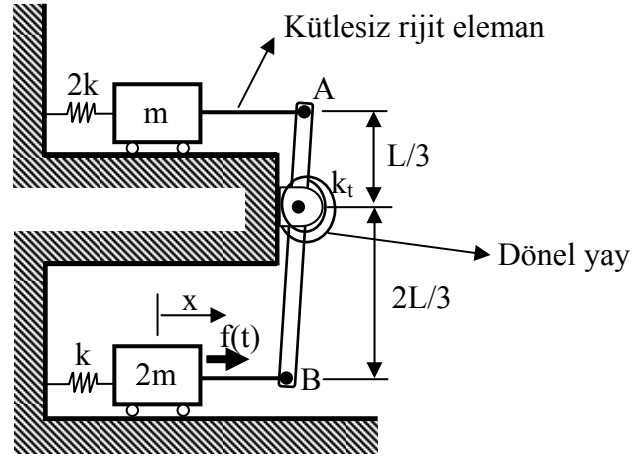
b) Aşağıdaki sistemler için doğal frekans ifadelerini elde ediniz.



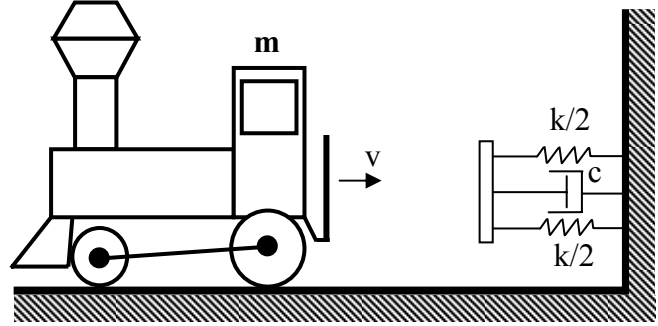
c) 600 kg kütleli bir makine basit mesnetli bir çelik kiriş üzerine monte edilmiştir. Kiriş boyu 3 m'dir ve 0.5x0.1 m dikdörtgen kesite sahiptir. Kiriş malzemesine ait elastisite modülü (Young's modulus) $E=2.06E11$ N/m² dir. Kiriş orta noktasının statik çökme miktarını ilk çökme miktarının (yay yok iken) 1/3'üne düşürmek için kiriş orta noktasına eklenmesi gerekli yayın direngenliğini hesaplayınız. Kiriş kütesini ihmal ediniz.



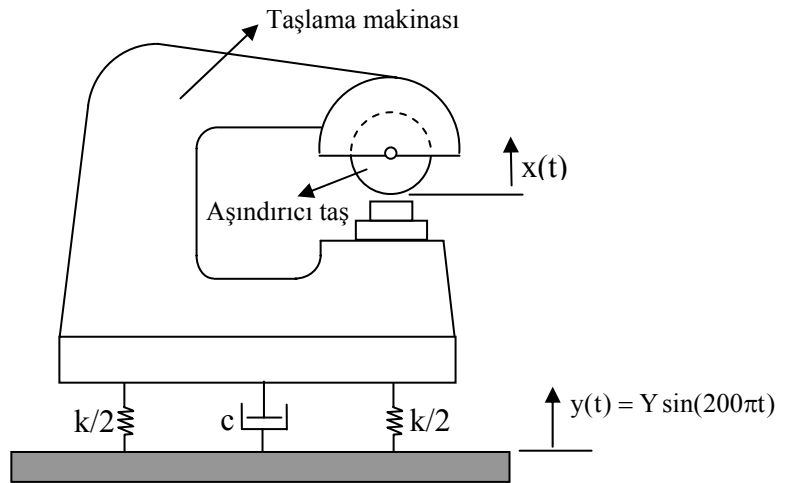
S2. Yandaki sisteme ait hareket denklemini yazınız ve doğal frekans ifadesini sistem parametreleri cinsinden ifade ediniz.



S3. Şekilde görülen lokomotif 2000 kg kütleyle sahiptir. 10 m/s hız ile ilerleyen lokomotif yol sonunda görülen sönümleyici sistem ile durdurulmaktadır. Lokomotif ve sönümleyici buluştuktan sonra birlikte hareket etmektedirler. Sönümleyici içerisindeki yay katsayısı $k=40$ N/mm ve amortisör sönüm katsayısı değeri $c=20$ Ns/mm dir. Lokomotif sönümleyici ile buluştuktan sonra lokomotifin yaptığı hareketin zamana göre değişimini yazınız.



S4. Şekilde görülen taşlama tezgahı direngenliği (k) 1000 kN/m, sönüm katsayısı (c) 1000 Ns/m olan bir izolatör üzerine monte edilmiştir. Taşlama tezgahının ve üzerindeki ekipmanların toplam ağırlığı 5000 N'dur. Tezgahın oturduğu zemin tezgaha yakın bir kaynak dolayısı ile şekilde verilen formdaki bir harmonik zorlamaya maruzdur. Taşlama tezgahı için izin verilen en büyük yer değiştirme değeri $1 \mu\text{m}$ 'dir. Bu değeri aşmamak için zemin titreşimlerine ait en büyük genlik Y ne olmalıdır. İzolatör sönüm katsayısını arttırmanın taşlama makinesi yer değiştirme genliğine etkisi ne olur? Açıklayınız.



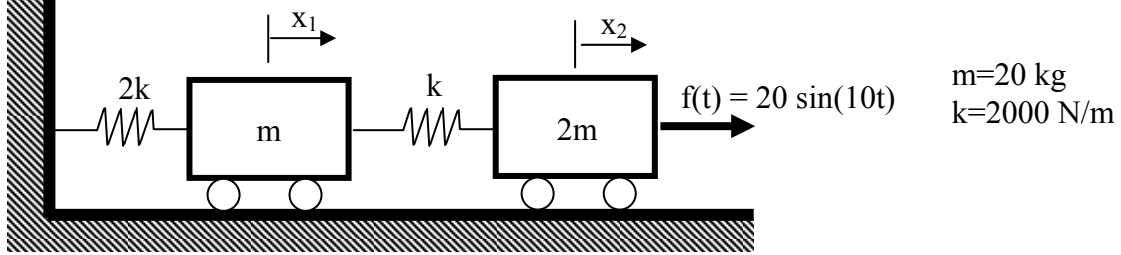
Sınavda **soru çözümü içermeyen** 1 adet A4 Formül kâğıdı kullanılabilir. Sınav süresi 90 dakikadır. **BAŞARILAR.**

Yrd.Doç.Dr. Zeki Kırıl

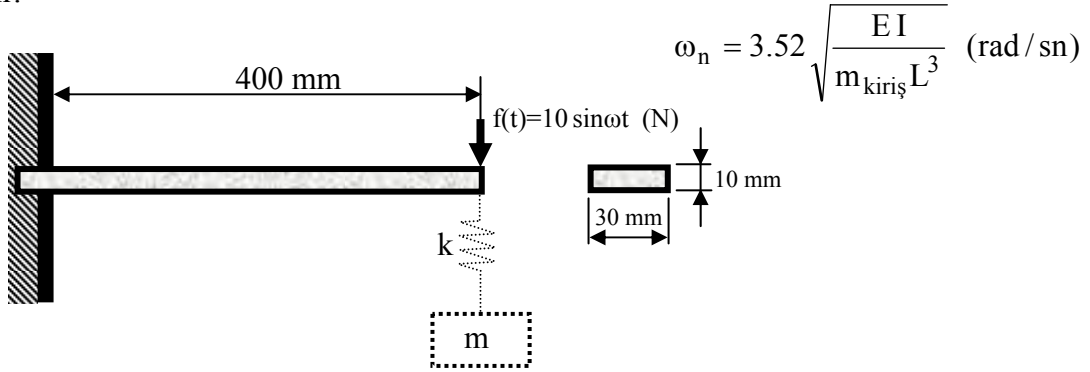
DEÜ MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK TİTREŞİMLER ARASINAV 2-17.12.2008

Ad Soyad	S1	S2	S3	S4	Σ
No					

S1. Şekilde verilen iki serbestlik dereceli sistemin gösterilen şekildeki harmonik zorlama etkisinde x_1 ve x_2 yer değiştirme genliklerini hesaplayınız.

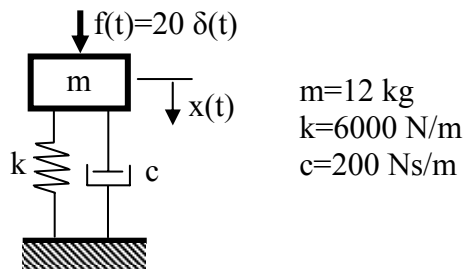


S2. Şekildeki ankastre kiriş 10 Newton şiddetinde bir harmonik bir zorlama etkisindedir ve rezonans durumunda çalışmaktadır. Kiriş çelik malzemeden imal edilmiş olup yoğunluğu $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$ ve elastisite modülü $E=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ dir. Ankastre kirişin tek serbestlik dereceli bir yay kütle sistemi olarak düşünülmesi durumunda 1. doğal frekans ifadesi aşağıda verilmiştir.



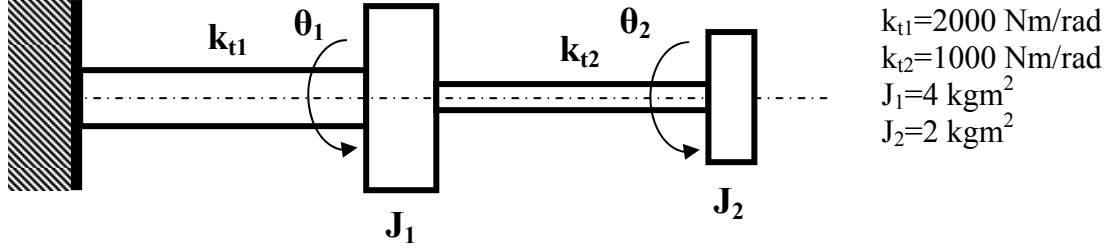
Ankastre kiriş uç nokta titreşimlerini yok etmek için kiriş ucuna şekilde görüldüğü gibi bir yutucu ilave edilecektir. Eklenecek yutucunun kütlesi 0.2 kg olarak seçilecektir. Bu durumda yutucu yay katsayısını belirleyiniz. Yutucunun eklenmesi ile oluşan sistemin doğal frekanslarını hesaplayınız ve mevcut durum için yutucunun yer değiştirme genliğini bulunuz.

S3. a) Şekildeki tek serbestlik dereceli sistem 20 N şiddetinde bir impuls zorlama ile uyarılmıştır. $x(t)$ yer değiştirmesini bulunuz.



S3. b) Doğal frekansı 15 Hz olan bir sismometrenin sönüm oranı $\zeta=0.5$ dir. Sismometrenin %2' den düşük hata ile ölçüm yapabileceği en düşük frekans değeri nedir?

S4. Şekildeki iki serbestlik dereceli disk-mil sisteminde genel koordinatlar θ_1 ve θ_2 dir. Mil kütleleri ihmal edilmektedir. Sistem $t=0$ 'da $\theta_{1(t=0)}=0.1$ radyan, $\theta_{2(t=0)}=0.15$ radyan'dır.



Sistemin doğal frekanslarını bulunuz. θ_2 genel koordinatını referans alarak Modal matrisi oluşturunuz. Verilen başlangıç şartını kullanarak $\theta_1(t)$ 'yi bulunuz. (Modal analiz yöntemi kullanılacaktır).

Sınav Süresi 100 Dakikadır. BAŞARILAR.

Yrd.Doç.Dr. Zeki KIRAL

ARASINAV 2 ÇÖZÜMLER

C1.

$$E_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_2^2, \quad E_2 = \frac{1}{2}2kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2, \quad \delta W = f \delta x_2$$

$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = 0 \quad (1), \quad 2m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = f \quad (2)$$

$$20\ddot{x}_1 + 6000x_1 - 2000x_2 = 0$$

$$40\ddot{x}_2 + 2000x_2 - 2000x_1 = 20 \sin(10t)$$

$x_1(t) = X_1 \sin(10t)$ ve $x_2(t) = X_2 \sin(10t)$ olarak kabul edilir. Bu durumda

$$\ddot{x}_1(t) = -100X_1 \sin(10t), \quad \ddot{x}_2(t) = -100X_2 \sin(10t)$$

Bu ifadeler yerine konur ise

$$\begin{aligned} 4000X_1 - 2000X_2 &= 0 \\ -2000X_1 - 2000X_2 &= 20 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} X_1 &= -0.0033 \text{ m} \\ X_2 &= -0.0067 \text{ m} \end{aligned}$$

C2. $m_{\text{kiriş}}=0.936 \text{ kg}$, $I_{\text{kiriş}}=2.5 \times 10^{-9} \text{ kgm}^2$

$$\omega_1 = 3.52 \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} * 2.5 \times 10^{-9}}{0.936 * 0.4^3}} = 321.5879 \text{ rad/sn} = 51.1823 \text{ Hz}$$

$$m_{\text{yutucu}}=0.2 \text{ kg} \rightarrow \omega_{\text{yutucu}} = 321.5879 = \sqrt{\frac{k_{\text{yutucu}}}{0.2}} \rightarrow k_{\text{yutucu}}=20684 \text{ N/m}$$

$$\text{Yutucunun yer değiştirme genliği} \rightarrow x_{\text{yutucu}} = \frac{-F_0}{k_{\text{yutucu}}} = -0.4834 \text{ mm}$$

Yutucu eklendikten sonra oluşan iki serbestlik dereceli sistemin doğal frekansları

$$\omega_{1,2} = \omega_{\text{kiriş}} \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \mp \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}}$$

$$\mu = \frac{m_{\text{yutucu}}}{m_{\text{kiriş efektif}}} = \frac{0.2}{\frac{33}{140} m_{\text{kiriş}}} = \frac{0.2}{\frac{33}{140} * 0.936} = 0.9065,$$

$$\omega_1 = 203.0762 \text{ rad/sn}, \quad \omega_2 = 509.2610 \text{ rad/sn}$$

C3.

$$\text{a) } \xi = \frac{200}{2\sqrt{6000 * 12}} = 0.3727, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{6000}{12}} = 22.3607 \text{ rad/sn},$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 20.7497 \text{ rad/sn}, \quad x(t) = 0.0803 e^{-8.3338t} \sin(20.7497t)$$

b) Sismometre kuralı $r > 3$ olmalı.

$$1.02 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \rightarrow r_1=4.9730, r_2=1.0209 \rightarrow r_1 \text{ kullanılır.}$$

$$f_{\min}=4.9730*15=74.5950 \text{ Hz.}$$

C4.

$$E_p = \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_2 - \theta_1)^2, E_k = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned} 4\ddot{\theta}_1 + 3000\theta_1 - 1000\theta_2 = 0 \\ 2\ddot{\theta}_2 + 1000\theta_2 - 1000\theta_1 = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 4s^2 + 3000 & -1000 \\ -1000 & 2s^2 + 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, s = i\omega$$

$$\det \begin{bmatrix} -4\omega^2 + 3000 & -1000 \\ -1000 & -2\omega^2 + 1000 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 8\omega^4 - 10000\omega^2 + 2000000 = 0, \omega^2 = z$$

$$z_1 = 1000, z_2 = 250 \rightarrow \omega_1 = 15.8114 \text{ rad/sn}, \omega_2 = 31.6228 \text{ rad/sn}$$

Birinci denklemden

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1000}{3000 - 4\omega^2}, \omega_1^2 = 250 \rightarrow \varphi_1 = \left\{ \frac{1000}{3000 - 4*250} = 0.5 \right\},$$

$$\omega_2^2 = 1000 \rightarrow \varphi_2 = \left\{ \frac{1000}{3000 - 4*1000} = -1 \right\},$$

Modal matris

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} J \\ \left[\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{array} \right\} \end{matrix} + \begin{matrix} K_t \\ \left[\begin{array}{cc} 3000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$P^T J P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad P^T K_t P = \begin{bmatrix} 750 & 0 \\ 0 & 6000 \end{bmatrix}$$

Modal koordinatlarda hareket denklemi

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 750 & 0 \\ 0 & 6000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ İlk şartlar } \rightarrow \begin{Bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \end{Bmatrix}$$

$$\theta = Pq \rightarrow q_0 = P^{-1}\theta_0 \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \{q_0\} = \begin{Bmatrix} 0.1665 \\ -0.01665 \end{Bmatrix}$$

Modal koordinatlarda iki adet bağımsız denklem mevcut,

$$3\ddot{q}_1 + 750q_1 = 0$$

$$6\ddot{q}_2 + 6000q_2 = 0$$

1. denklem cevabı

$$q_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t, \text{ ilk şartlardan } A=0.1665, B=0$$

$$q_1(t) = 0.1665 \cos 15.8114t$$

2. denklem cevabı

$$q_2(t) = A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t, \text{ ilk şartlardan } A=-0.01665, B=0$$

$$q_2(t) = -0.01665 \cos 31.6228t$$

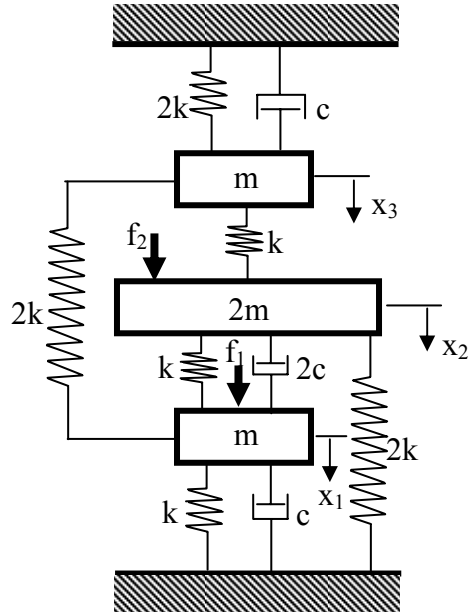
$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^P \begin{Bmatrix} 0.1665 \cos 15.8114t \\ -0.01665 \cos 31.6228t \end{Bmatrix}$$

$$\theta_1(t) = 0.08325 \cos 15.8114t + 0.1665 \cos 31.6228t$$

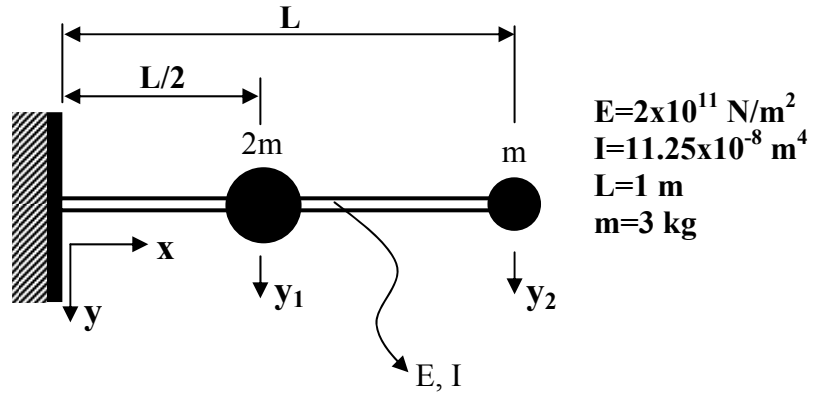
DEÜ MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MEKANİK TİTREŞİMLER FİNAL SINAVI (21.01.2009)

Ad Soyad		S1	S2	S3	S4	Σ
No						

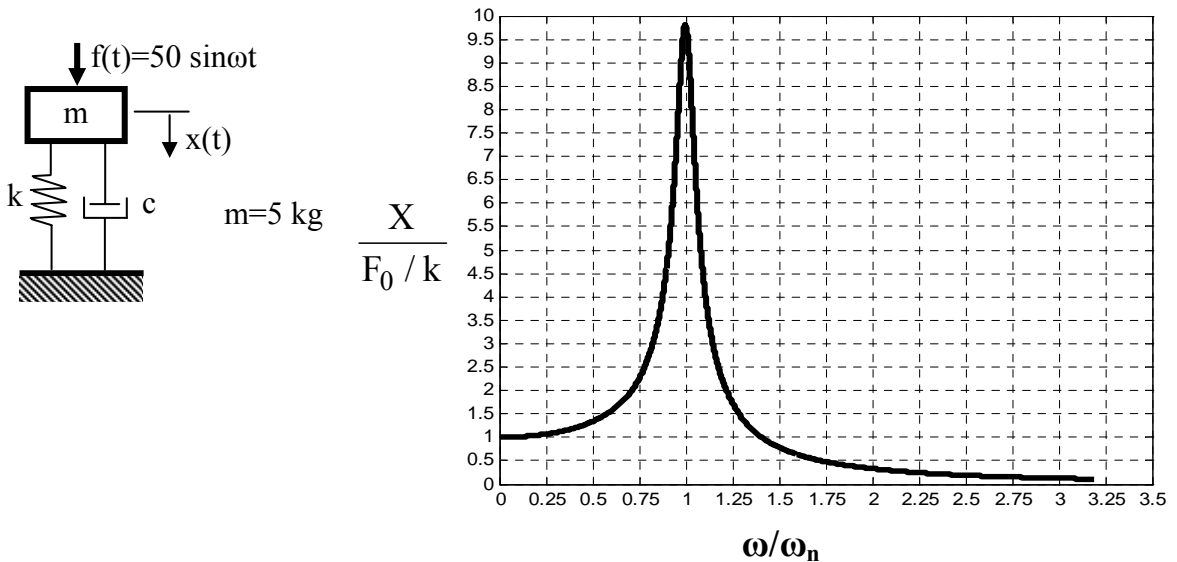
- (30) S1. Şekilde verilen sistemde f_1 ve f_2 girdi, x_1 , x_2 ve x_3 çıktılardır. Sistemin hareket denklemlerini elde edip matris formunda gösteriniz.



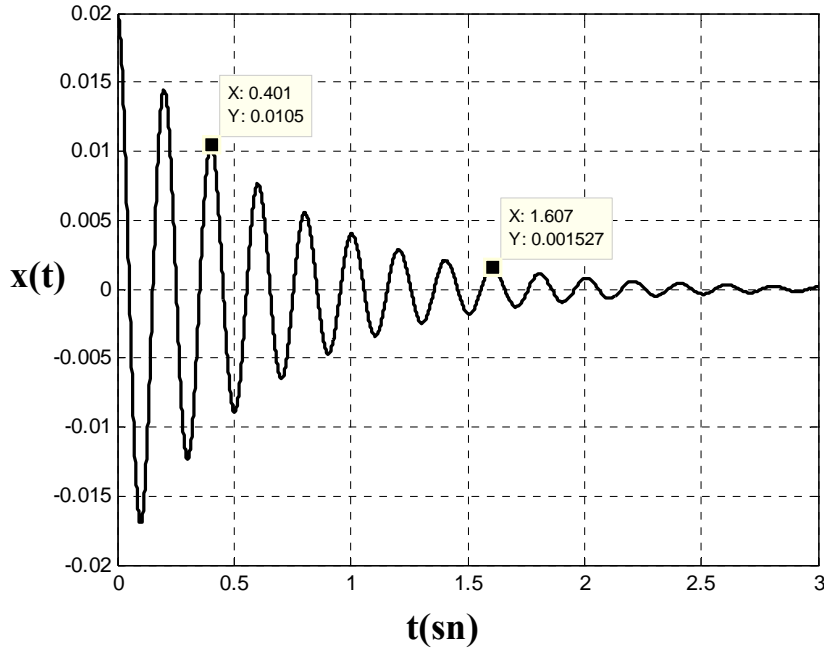
- (30) S2. Şekildeki ankastre kiriş $2m$ ve m değerlerine sahip iki adet kütle taşımaktadır. Kiriş kütlesi ihmal edilmektedir. Sistemin esneklik matrisini elde ediniz ve doğal frekanslarını hesaplayınız. 1. doğal frekansı Dunkerley metodu ile de hesaplayınız.



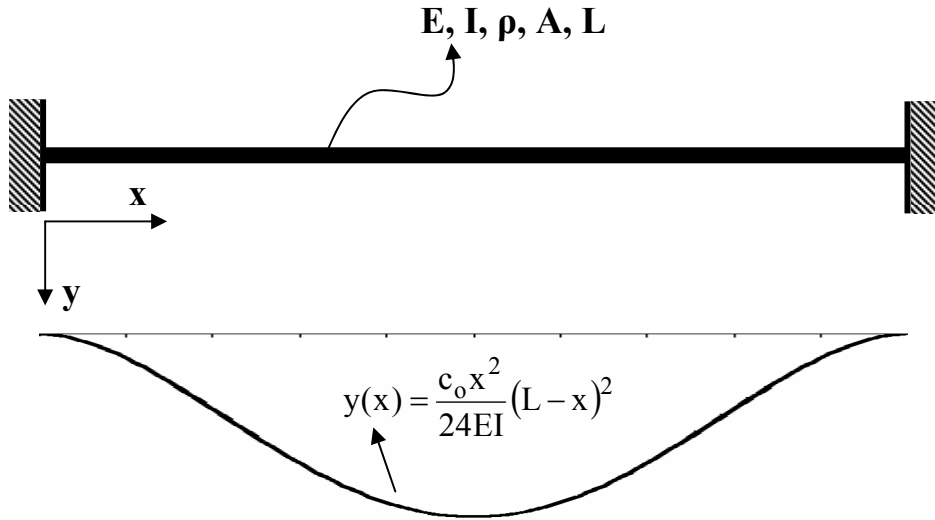
- (30) S3. Şekildeki yay-kütle-amortisör sisteminde m kütesinin etkisi ile oluşan statik çökme 10 mm 'dir. Yay kütle sisteminin harmonik zorlama cevabı'da şekilde verilmiştir. Kütlelinin yer değiştirme genliğinin 5 mm 'den fazla olmaması için uyarım frekansı en az ne olmalıdır?



Yay kütle sisteminin ilk şartlar altındaki serbest titreşim cevabı şekilde verilmiştir. Sistemdeki amortisörün sönüm katsayısını hesaplayınız.



- (30) S4. Şekilde görülen ankastre-ankastre kiriş için yer değiştirme eğrisi $y(x)$ ile ifade edilmektedir. Bu ifade de c_0 sabit bir katsayıdır. Verilen yer değiştirme eğrisini kullanarak kirişe ait ilk doğal frekansı elde ediniz.

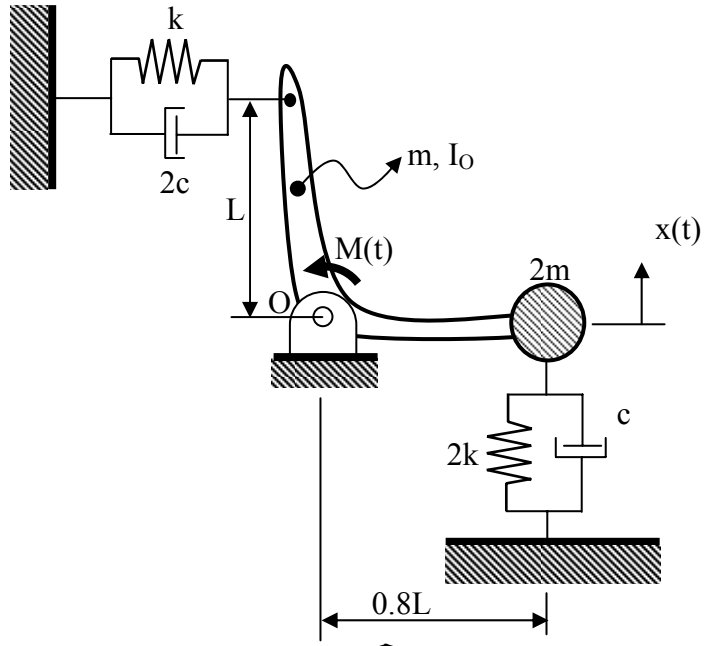


Sınav süresi 110 dakikadır. BAŞARILAR...

Yrd.Doç.Dr. Zeki Kırıl

Örgün	DEÜ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ						
iö	MAK4041 MEKANİK TİTREŞİMLER 1 ARASINAV 10.11.2009						
AD SOYAD	S1	S2	S3	S4	S5	Σ	
NO							

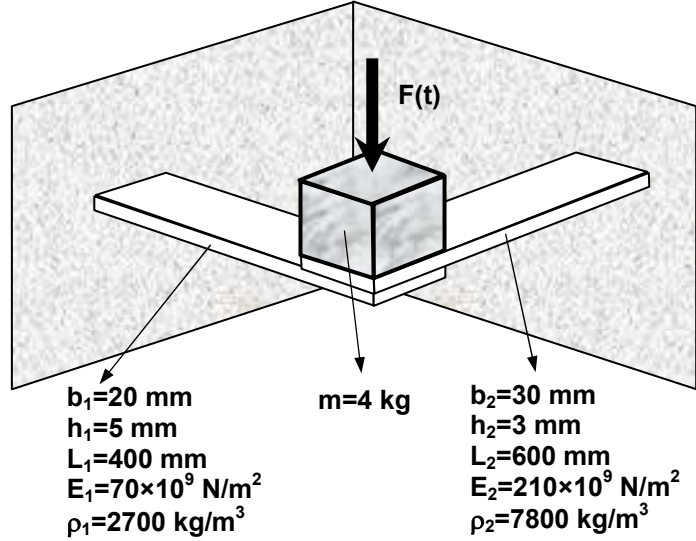
S1. Şekilde verilen mekanik sistemin hareket denklemini elde ediniz. Sisteme ait doğal frekans ifadesini yazınız.



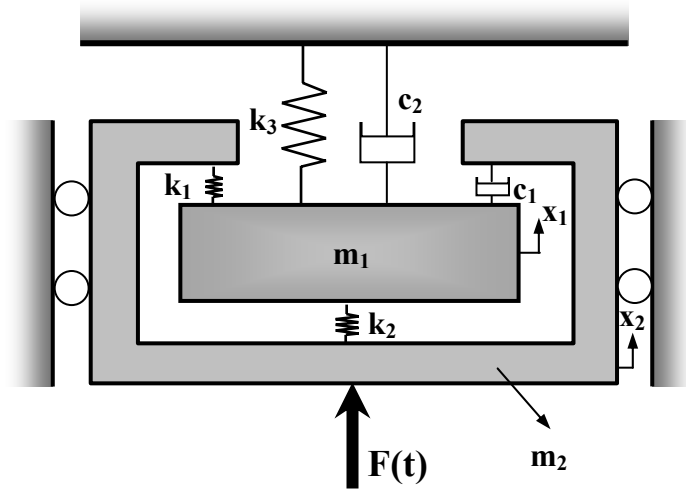
S2. Şekilde verilen ankastre kiriş destekli sönümsüz sisteme etki eden kuvvet $F(t)=50\sin(20t)$ formundadır.

Sistemin doğal frekansını ve $F(t)$ kuvveti ile oluşan titreşim genliğini

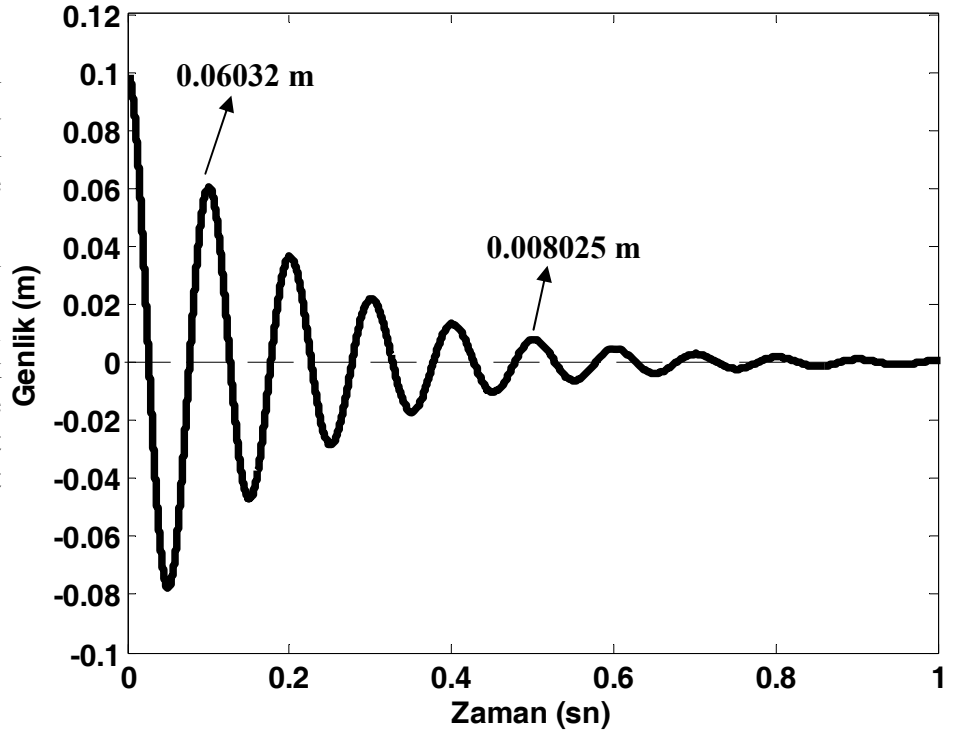
- Kiriş kütlelerini ihmal ederek
- Kiriş kütlelerini dahil ederek hesaplayınız.



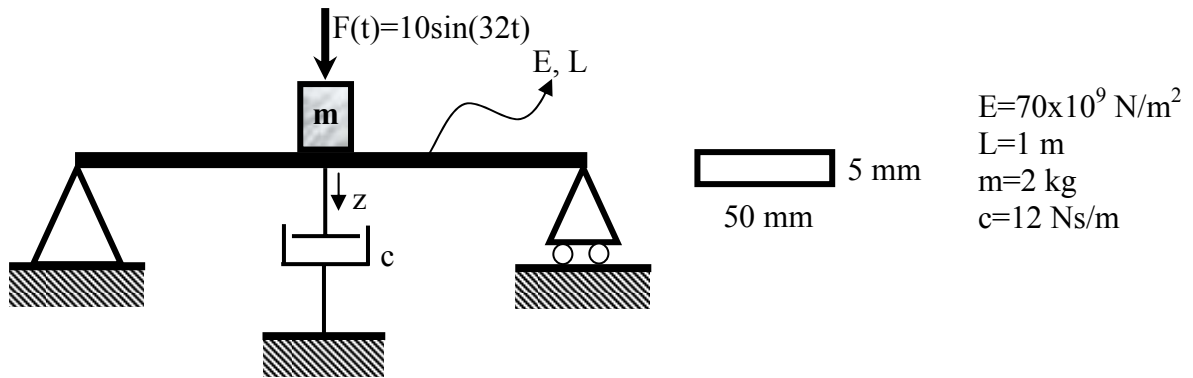
S3. Şekilde verilen mekanik sistemin girdisi $F(t)$ çıktıları ise x_1 ve x_2 'dir. Mekanik sistemin hareket denklemlerini elde ediniz ve matris formunda gösteriniz.



S4. Bir mekanik sistemde statik çökme değeri 2.48 mm olarak ölçülmüştür. Bu mekanik sistem için yapılan bir serbest titreşim deneyinde 0.1 m'lik bir ilk yer değiştirme ile ölçülen serbest titreşim eğrisi şekilde verilmiştir. Serbest titreşim cevabındaki farklı anlar için genlik değerleri şekil üzerinde gösterilmiştir. Sistemin serbest titreşimlerine ait hareket denklemini yazınız.



S5. Şekilde verilen basit mesnetli sönümlü kiriş-kütle sistemi şekilde görüldüğü gibi bir harmonik zorlama etkisindedir. Amortisör ve m kütlesi kiriş orta noktasındadır. **Kiriş kütlelerini ihmal ediniz.** Harmonik zorlama etkisinde kiriş orta nokta çökmesinin $z(t)$ zamana bağlı ifadesini yazınız. Zorlama frekansı bir miktar artırıldığında kiriş orta nokta titreşim genlikleri azalır mı, artar mı? Sistemin rezonans frekansını ve rezonans genliğini hesaplayınız.



Sınav süresi 90 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. Başarılar.

Yrd.Doç.Dr. Zeki Kırıl

ARASINAV-1 ÇÖZÜMLER

$$\text{C1. } \theta = \frac{x}{0.8L} = 1.25 \frac{x}{L}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_o \left(1.25 \frac{\dot{x}}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[2m + \frac{1.5625}{L^2} I_o \right] \dot{x}^2,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} 2kx^2 + \frac{1}{2} k \left(1.25 \frac{x}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} [2k + 1.5625k] x^2 = \frac{1}{2} 3.5625kx^2$$

$$\delta W = M\delta \left(1.25 \frac{x}{L} \right) - c\dot{x}\delta x - 2c(1.25\dot{x})\delta(1.25x) = \left[1.25 \frac{M}{L} - 4.125c\dot{x} \right] \delta x$$

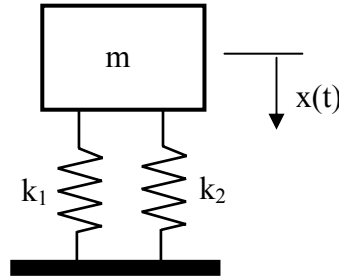
x 'e göre Lagrange denklemi uygulanır ise hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left[2m + \frac{1.5625}{L^2} I_o \right] \ddot{x} + 4.125c\dot{x} + 3.5625kx = \frac{1.25}{L} M(t)$$

Doğal frekans ifadesi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.5625k}{2m + \frac{1.5625}{L^2} I_o}} \quad (\text{rad/sn})$$

C2. Ankastre kirişlerin uç noktalarındaki çökmeler aynıdır, dolayısı ile kirişler paralel bağlı yaylar olarak düşünülür.



a) Kirişlere ait direngenlik ifadeleri.

$$k_1 = \frac{3E_1 I_1}{L_1^3} = \frac{3 \times 70 \times 10^9 \times \frac{0.02 \times 0.005^3}{12}}{0.4^3} = 683.5938 \text{ N/m}$$

$$k_{21} = \frac{3E_{21} I_2}{L_2^3} = \frac{3 \times 210 \times 10^9 \times \frac{0.03 \times 0.003^3}{12}}{0.6^3} = 196.8750 \text{ N/m}$$

$$k_{eş} = k_1 + k_2 = 880.4688 \text{ N/m}$$

Kiriş kütleleri ihmal edildiğinde sistemin doğal frekansı

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eş}}{m}} = \sqrt{\frac{880.4688}{4}} = 14.8363 \text{ rad/sn}$$

Sönümsüz tek serbestlik dereceli sistem harmonik zorlama cevabı $x(t)=X\sin\omega t$ 'den cevap genliği bulunabilir.

$$\frac{X}{F/k} = \frac{1}{1-r^2} \rightarrow X = \frac{F/k}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = X = \frac{50/880.4688}{1-\left(\frac{20}{14.8366}\right)^2} = -0.0695 \text{ m.}$$

b) 1. kiriş için kiriş uç noktasındaki efektif kiriş kütlesi $m_{1\text{eff}} = \frac{33\rho_1 b_1 h_1 L_1}{140} = 0.0255 \text{ kg}$

2. kiriş için kiriş uç noktasındaki efektif kiriş kütlesi $m_{2\text{eff}} = \frac{33\rho_2 b_2 h_2 L_2}{140} = 0.0993 \text{ kg}$

Kiriş efektif kütleleri ile 4 kg'lık kütle değeri toplanır ise kiriş uç noktalarında hareket eden toplam eşdeğer kütle $m_{eş} = m + m_{1\text{eff}} + m_{2\text{eff}} = 4.1248 \text{ kg}$ olarak elde edilir. Bu durum için sistemin doğal frekansı

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eş}}{m_{eş}}} = \sqrt{\frac{880.4688}{4.1248}} = 14.613 \text{ rad/sn ve harmonik titreşim genliği}$$

$$X = \frac{50/880.4688}{1-\left(\frac{20}{14.613}\right)^2} = -0.0650 \text{ m'dir.}$$

C3. $E_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$, $E_2 = \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_1^2$

$$\delta W = F(t)\delta x_2 - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\delta(x_2 - x_1) - c_2x_1\delta x_1$$

Lagrange denklemi uygulanarak hareket denklemleri elde edilir (Diğer yöntemler de uygulanabilir)

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_1\dot{x}_2 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1 - (k_1 + k_2)x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 - (k_1 + k_2)x_1 + (k_1 + k_2)x_2 = F(t)$$

Hareket denklemleri matris notasyonunda aşağıdaki şekilde gösterilebilir

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -(k_1 + k_2) \\ -(k_1 + k_2) & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \end{Bmatrix}$$

C4. Statik çökme ifadesinden yararlanılarak sistemin doğal frekansı hesaplanır.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{statik}}}} = \sqrt{\frac{9.81}{0.00248}} = 62.89 \text{ rad/sn.}$$

Logaritmik dekremantasyon ifadesinden yararlanılarak sistemin sönüm oranı hesaplanır.

$$\delta = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{0.06032}{0.008025}\right) = 0.504, \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0.08$$

Mekanik sisteme ait serbest titreşimleri ifade eden hareket denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \rightarrow \ddot{x} + 10.0624\dot{x} + 3955.2x = 0 \text{ şeklindedir.}$$

Soruda istenmemiş olmakla birlikte kiritik altı sönümlü bu sistemin serbest titreşim cevabı şu şekilde yazılabilir ($x_0=0.1, \dot{x}_0 = 0$)

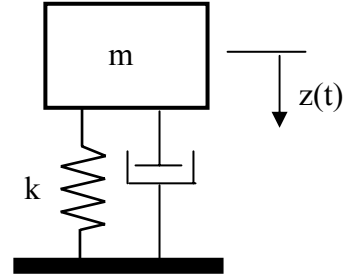
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 62.89 \sqrt{1 - 0.08^2} = 62.6884 \text{ rad/sn.}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{(\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}\right)\right)$$

$$x(t) = 0.1e^{-5.0265t} \sin(62.6884t + 1.4749)$$

C5. Kiriş orta noktası için direngenlik, $k = \frac{48EI}{L^3}$ dir.

$$k = \frac{48 \times 70 \times 10^9 \frac{0.05 \times 0.005^3}{12}}{1^3} = 1750 \text{ N/m}$$



Sistemin doğal frekansı

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1750}{2}} = 29.58 \text{ rad/sn.}$$

Sistemin sönüm oranı

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{12}{2 \times 2 \times 29.58} = \frac{12}{118.32} = 0.1$$

Kritik altı sönümlü sistem için kiriş orta noktası harmonik cevabı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

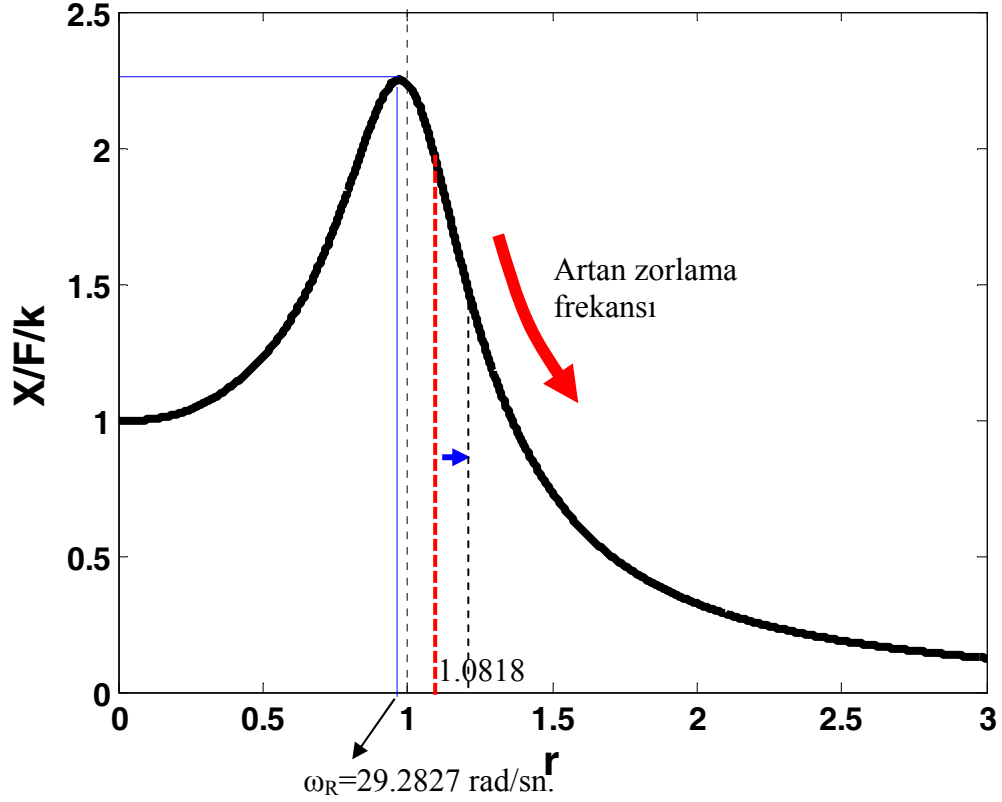
$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

Zorlama frekansı $\omega=32 \text{ rad/sn}$ 'dir. Dolayısı ile frekans oranı $r=\omega/\omega_n=1.0818$ 'dir.

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1 - r^2)^2}} = \frac{10/1750}{\sqrt{(2 \times 0.1 \times 1.0818)^2 + (1 - 1.0818^2)^2}} = 0.0208 \text{ m.}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 0.1 \times 1.0818}{1-1.0818^2}\right) = -0.940 \text{ rad.}$$

$$x(t) = 0.0208 \sin(32t + 0.94) \text{ dir.}$$



Şekilden görüldüğü gibi zorlama frekansını bir miktar arttırmak frekans oranını arttıracak ve kiriş orta nokta titreşim genlikleri **azalacaktır**.

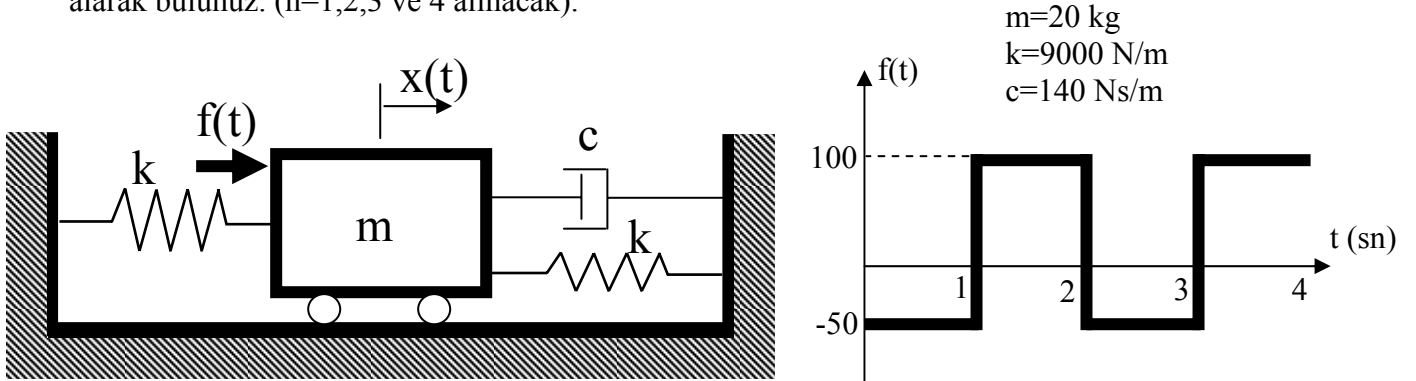
$$\text{Rezonans frekansı } \omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 29.2828 \text{ rad/sn.}$$

$$\text{Rezonans genliği } X_R = \frac{F/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{10/1750}{2 \times 0.1 \sqrt{1-0.1^2}} = 0.0287 \text{ m.}$$

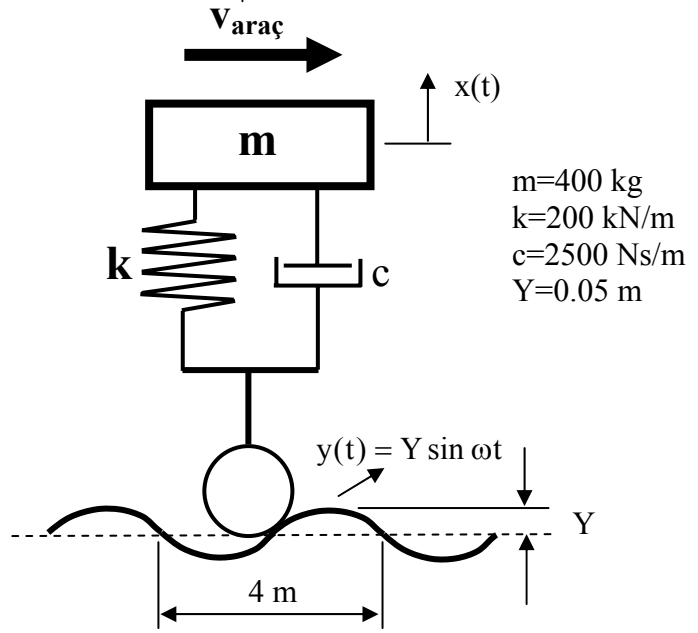
DEÜ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MAK4041 MEKANİK TİTREŞİMLER 2. ARASINAV 15.12.2009

AD SOYAD	S1	S2	S3	S4	Σ
NO					

S1. Şekilde verilen mekanik sistem için üzerine etki eden periyodik zorlamaya cevabı 4 terim olarak bulunuz. ($n=1,2,3$ ve 4 alınacak).



S2. Şekilde verilen çeyrek araç modeli için araç hızı 80 km/h dır. Araç titreşim genliklerini ve bu frekansta araca etki eden kuvvet genliğini hesaplayınız. Amortisör katsayısının artırılmasının araç titreşim genlikleri ve araca iletilen kuvvet genliğine etkisi ne olur (Azaltır/Arttırır) grafik üzerinde açıklayınız.



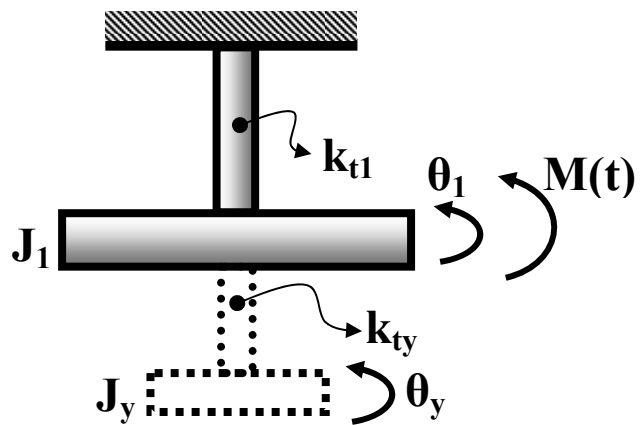
S3. Şekilde verilen dönel sistemde zorlama $M(t)=60\sin 50t$ formundadır. Sistemin titreşim genliklerini sıfırlamak için tasarlanacak 0.2 kgm^2 kütle atalet momentine sahip yutucu için dönel yay sabitini belirleyiniz.

$$J_1 = 1.2 \text{ kgm}^2$$

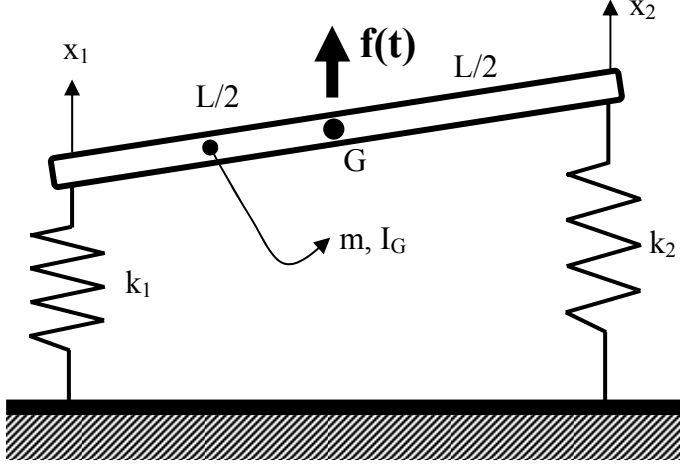
$$k_{t1} = 900 \text{ Nm/rad}$$

$$J_y = 0.2 \text{ kgm}^2$$

Yutucu eklendiği durum için yutucu açısız titreşim genliğini derece olarak hesaplayınız. Zorlama frekansının 4 Hz olması durumu için ana disk (θ_1) ve yutucu (θ_y) için açısız titreşim genliklerini hesaplayınız (radyan).



S4. Şekilde verilen iki serbestlik dereceli sisteme ait hareket denklemleri aşağıda verilmiştir. Sistemin doğal frekanslarını hesaplayınız. Titreşim biçimlerini biçimlerini elde ederek modal matrisi oluşturunuz. $F(t)=50 \cos 8\pi t$ için X_1 ve X_2 titreşim genliklerini hesaplayınız.



$$\begin{aligned} m &= 30 \text{ kg} \\ k_1 &= 2000 \text{ N/m} \\ k_2 &= 4000 \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$\frac{m}{3} \ddot{x}_1 + \frac{m}{6} \ddot{x}_2 + k_1 x_1 = \frac{f}{2}$$

$$\frac{m}{6} \ddot{x}_1 + \frac{m}{3} \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = \frac{f}{2}$$

Sınav Süresi 100 Dakikadır. Başarılar.

Yrd.Doç.Dr. Zeki Kırıl

ÇÖZÜMLER

C1.

Sistemin hareket denklemi

$$20\ddot{x} + 140\dot{x} + 18000x = f(t), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{18000}{20}} = 30 \text{ (rad/sn)}, \quad \zeta = \frac{140}{2\sqrt{18000 \times 20}} = 0.1167$$

$$f(t) = \begin{cases} -50 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$T=2 \text{ sn. } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (rad/sn) [Temel frekans]}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^4 a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^4 b_n \sin n\omega t$$

Fourier katsayıları hesaplanır ise

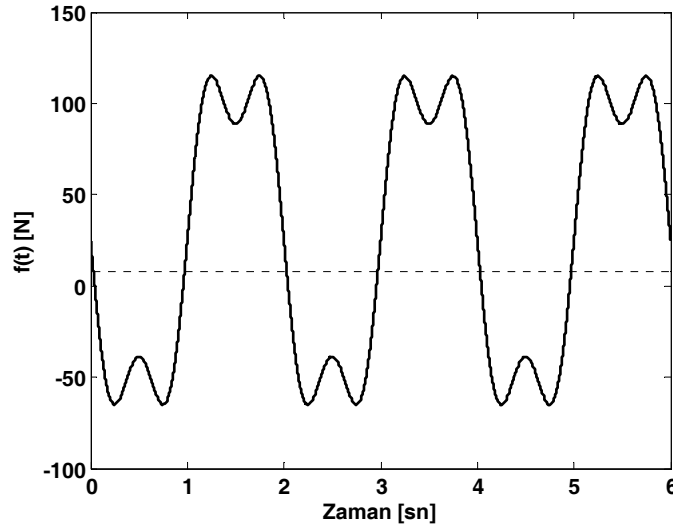
$$a_0 = 50, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{150}{n\pi} \cos(n\pi - 1)$$

İlk dört terim alınacak

$$b_1 = -\frac{300}{\pi}, \quad b_2=0, \quad b_3 = -\frac{300}{3\pi}, \quad b_4=0$$

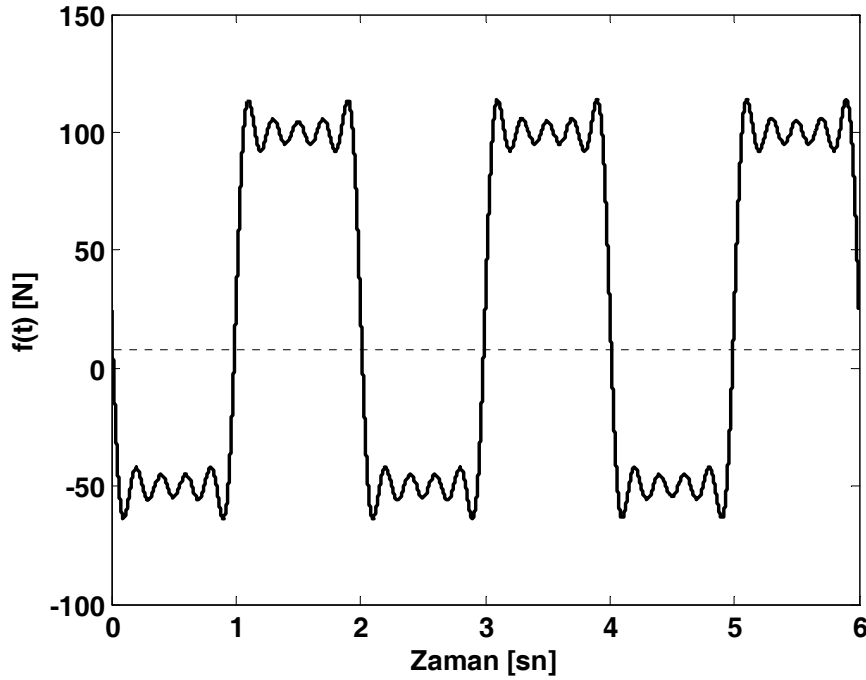
$$f(t) = \frac{50}{2} - \frac{300}{\pi} \sin \pi t - \frac{300}{3\pi} \sin 3\pi t$$

Bu fonksiyon aşağıdaki gibidir.



Terim sayısı arttırılır ise $f(t)$ fonksiyonuna daha çok yaklaşılabılır.

$$f(t) = \frac{50}{2} - \frac{300}{\pi} \sin \pi t - \frac{300}{3\pi} \sin 3\pi t - \frac{300}{5\pi} \sin 5\pi t - \frac{300}{7\pi} \sin 7\pi t - \frac{300}{9\pi} \sin 9\pi t \quad \text{için fonksiyon}$$



şeklindedir.

Dolayısı ile $x(t)$ farklı frekans ve genliklerdeki harmonik cevapların toplamı şeklinde olacaktır.

$$x(t) = \frac{50/2}{18000} + \left[\frac{-300}{18000} H(\pi) \sin(\pi t - \varphi_1) \right] + \left[\frac{-300}{18000} H(3\pi) \sin(3\pi t - \varphi_3) \right]$$

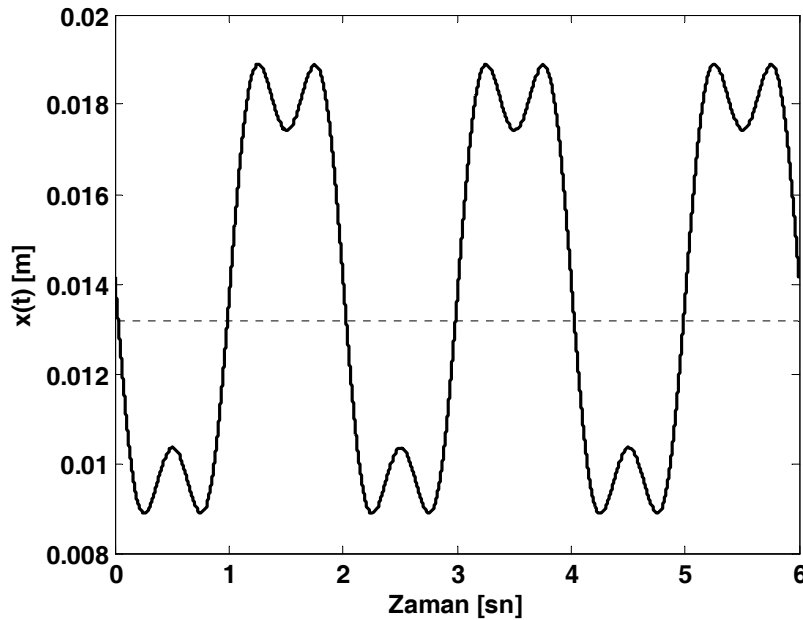
$$H(\pi) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\pi}{30}\right)^2\right)^2 + \left(2 \times 0.1167 \times \frac{\pi}{30}\right)^2}} = 1.0108$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2 \times 0.1167 \times \frac{\pi}{30}}{1 - \left(\frac{\pi}{30}\right)^2} \right) = 0.0247 \text{ rad}$$

$$H(3\pi) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{3\pi}{30}\right)^2\right)^2 + \left(2 \times 0.1167 \times \frac{3\pi}{30}\right)^2}} = 1.1059$$

$$\varphi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{3\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{3\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2 \times 0.1167 \times \frac{3\pi}{30}}{1 - \left(\frac{3\pi}{30}\right)^2} \right) = 0.0812 \text{ rad}$$

$$x(t) = \frac{50/2}{18000} + \left[\frac{-300}{\pi} \frac{1.0118 \sin(\pi t - 0.0247)}{18000} \right] + \left[\frac{-300}{3\pi} \frac{1.1059 \sin(3\pi t - 0.0812)}{18000} \right]$$

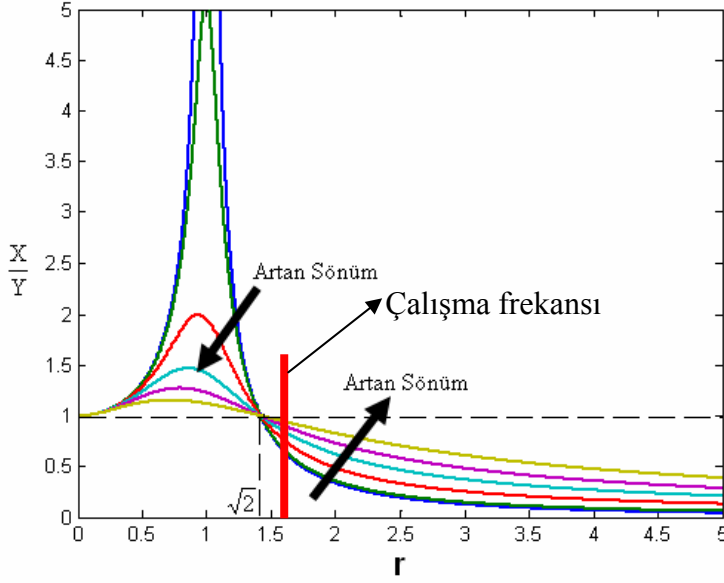


C2. $v=80 \text{ km/h}=22.22 \text{ m/sn}$. $\lambda=4 \text{ m}$.

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \times 22.22}{4} = 34.9 \text{ rad/sn}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{2500}{2 \times 400 \times 22.36} = 0.139$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200000}{400}} = 22.36 \text{ rad/sn} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{34.9}{22.36} = 1.56 \quad (r > \sqrt{2})$$

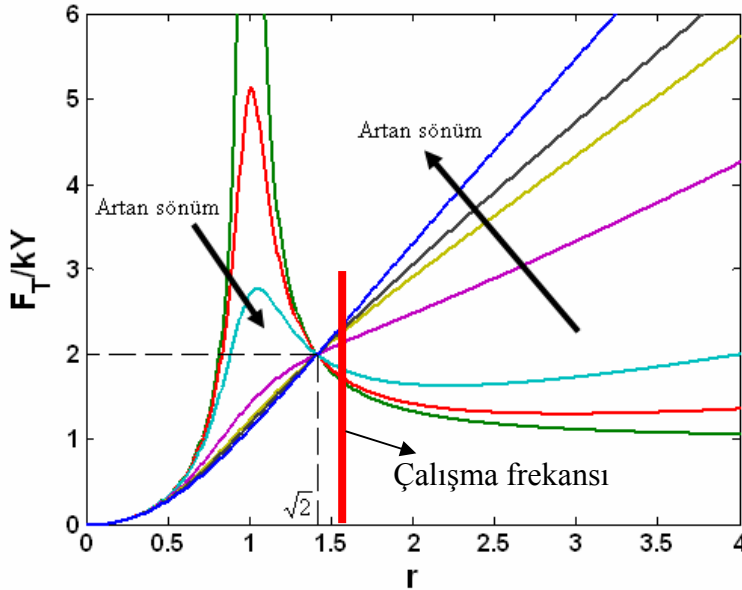
$$X = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad Y = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.139 \times 1.56)^2}}{\sqrt{(1 - 1.56^2)^2 + (2 \times 0.139 \times 1.56)^2}} \times 0.05 = 0.036 \text{ m}$$



$r > \sqrt{2}$ olduğu için amortisör katsayısının artırılması (sönümün artırılması) kütle titreşim genliklerini **ARTTIRACAKTIR.**

Kütleye iletilen kuvvet

$$F_T = \frac{r^2 \sqrt{1 + (2\zeta r)^2}}{\sqrt{(2\zeta r)^2 + (1 - r^2)^2}} kY = \frac{1.56^2 \sqrt{1 + (2 \times 0.139 \times 1.56)^2}}{\sqrt{(1 - 1.56^2)^2 + (2 \times 0.139 \times 1.56)^2}} 200000 \times 0.05 = 17710 \text{ N}$$



$r > \sqrt{2}$ olduğu için amortisör katsayısının artırılması (sönümün artırılması) kütleye uygulanan kuvveti **ARTTIRACAKTIR.**

C3. Zorlama frekansı $\omega = 50 \text{ rad/sn}$ 'dir. Dolayısı ile titreşim yutucunun doğal frekansı 50 rad/sn olarak ayarlanmalıdır.

$$k_{ty} = J_y * \omega_n^2 = 0.2 * 2500 = 500 \text{ Nm/rad}$$

$$\text{Yutuculu sistemde yutucu açısız yer değiştirmesi } \theta_y = -\frac{M}{k_{ty}} = -\frac{60}{500} = -0.12 \text{ rad } (-6.87^\circ)$$

Zorlama frekansı 4 Hz (25.13 rad/sn) olması durumunda her iki diskin açısız yer değiştirmesi

Ana kütle statik yer değiştirmesi

$$\delta_{st} = \frac{M}{k_{tl}} = \frac{60}{900} = 0.0667 \text{ rad}, \omega_1 = \sqrt{\frac{k_{tl}}{J_1}} = \sqrt{\frac{900}{1.2}} = 27.386 \text{ rad/sn},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{ty}}{J_y}} = \sqrt{\frac{500}{0.2}} = 50 \text{ rad/sn (İlk zorlama frekansı ile aynı idi)}$$

$$\theta_1 = \delta_{st} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{k_{ty}}{k_{tl}} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{k_{ty}}{k_{tl}}} = 0.0667 \frac{1 - \frac{25.13^2}{50^2}}{\left(1 - \frac{25.13^2}{50^2}\right) \left(1 + \frac{500}{900} - \frac{25.13^2}{27.386^2}\right) - \frac{500}{900}} = -2.2383 \text{ rad}$$

$$\theta_y = \delta_{st} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{k_{ty}}{k_{tl}} - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{k_{ty}}{k_{tl}}} = 0.0667 \frac{1}{\left(1 - \frac{25.13^2}{50^2}\right) \left(1 + \frac{500}{900} - \frac{25.13^2}{27.386^2}\right) - \frac{500}{900}} = -2.9948 \text{ rad}$$

C4.

$$\frac{m}{3} \ddot{x}_1 + \frac{m}{6} \ddot{x}_2 + k_1 x_1 = \frac{f}{2} \quad \begin{array}{l} m=30 \text{ kg} \\ k_1=2000 \text{ N/m} \\ k_2=4000 \text{ N/m} \end{array}$$

$$\frac{m}{6} \ddot{x}_1 + \frac{m}{3} \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = \frac{f}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 4000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0.5 \begin{Bmatrix} f(t) \\ f(t) \end{Bmatrix}$$

Harmonik cevap kabulü ile

$$\det \begin{bmatrix} 2000 - 10\omega^2 & -5\omega^2 \\ -5\omega^2 & 4000 - 10\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 75 \cdot \omega^4 + 60000 \cdot \omega^2 + 8000000 = 0$$

$$z = \omega^2 \text{ dönüşümü ile } z_1 = -169.0599, z_2 = -630.9401$$

$$\omega_{n1} = 13 \text{ rad/sn}, \omega_{n2} = 25.12 \text{ rad/sn}$$

Titreşim biçimleri řu şekilde hesaplanır

$$(2000 - 10\omega_1^2) X_1 - 5\omega_1^2 X_2 = 0, \left(\frac{X_1}{X_2} \right)_1 = \frac{5 \times 13^2}{2000 - 10 \times 13^2} = 2.73$$

$$\left(\frac{X_1}{X_2} \right)_2 = \frac{5 \times 25.12^2}{2000 - 10 \times 25.12^2} = -0.732 \quad M = \begin{bmatrix} 2.73 & -0.732 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$F(t)=50 \cos 8\pi t$ için $\rightarrow \omega = 8\pi = 25.13 \text{ rad/sn}$

$$\begin{bmatrix} 2000 - 10 \times 25.13^2 & -5 \times 25.13^2 \\ -5 \times 25.13^2 & 4000 - 10 \times 25.13^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50/2 \\ 50/2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4315.2 & -3157.6 \\ -3157.6 & -2315.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ 25 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{20006} \begin{bmatrix} -2315.2 & 3157.6 \\ 3157.6 & -4315.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 25 \\ 25 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0527 \\ -1.4466 \end{Bmatrix} (\text{m})$$