

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ**

**MAKİNA TEORİSİ, SİSTEM DİNAMİĞİ VE
KONTROL ANA BİLİM DALI LABORATUARI**

SÖNÜMLÜ SERBEST TİTREŞİMLER

DENEY FÖYÜ

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin DAL

2019

1. SÖNÜMLÜ SERBEST TİTREŞİMLER

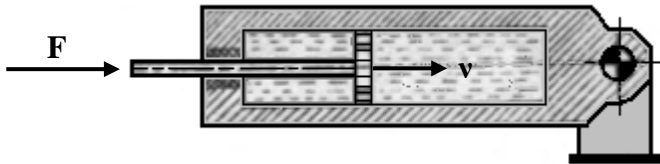
1.1. Giriş

Titreşim yapan bütün gerçek sistemlerde titreşime yol açan dış etki ortadan kaktıktan sonra titreşimler yavaş yavaş zayıfladığı ve bir süre sonra büsbütün yok olduğu gözlenir. Bunun nedeni sistemlerde mekanik enerjiyi yutan bir takım etkilerin mevcut olmasıdır. Çok çeşitli olan ve **sönüm** adı verilen bu etkilerin ortak özelliği sistemin hızına karşı koyan ve sönüm kuvveti adı verilen kuvvetlerin doğmasına yol açmalarıdır. Özel önem taşıyan bir sönüm türünü **viskoz sönüm** oluşturur. Bu durumda sönüm kuvveti

$$\vec{F}_s = -r \vec{v} \quad 1.1$$

şeklinde hızla orantılı katsayı r ye (bazı kaynaklarda c ile gösterilir) **viskoz sönüm katsayısı** adı verilir. Viskoz bir akışkan içerisine daldırılmış cisimlerin, düşük Reynolds sayılarındaki hareketlerinde bir tür sönüm ortaya çıkar.

Viskoz sönüm, mühendislik uygulamalarında sistemlere kasten de ilave edilir. Bu amaçla **viskoz sönüm elemanı** ya da **daşpot** adı verilen elemanlar kullanılır. Bir daşpot, içi viskoz bir akışkan (yağ) ile dolu bir silindire onun içinde hareket eden ve hareket sırasında akışkanın bir yandan öbürüne geçmesine olanak verecek biçimde delikli ve/veya boşluklu olarak imal edilmiş bir pistondan oluşur (Şekil 1). Daşpotun pistonunu silindire göre v hızıyla hareket ettirebilmek için (piston kütlesi ihmal edilirse) $F = rv$ kuvvetinin uygulanması gerekir. Viskoz sönüm katsayısından başka bir şey olmayan r , daşpotun konstrüktif özellikleri ile kullanılan akışkanın viskozitesinin bir fonksiyonudur.



Şekil 1. Viskoz Sönüm Elemanı (Daşpot)

1.2. Teorik Esaslar

Tek serbestlik dereceli bir sistemin sönümlü serbest titreşimleri en genel halde

$$\ddot{x} + 2D\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad 1.2$$

şeklinde bir diferansiyel denklemle temsil edilir. Burada D *sönüm faktörü/sayısı* olup Denk. 1.3'teki gibidir.

$$D = \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{r}{2m\omega_n} \quad 1.3$$

Bu denklemdeki δ *sönüm sabiti*dir. Denk. 1.4'te verilmiştir.

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad 1.4$$

Titreşim hareketlerinin ortaya çıkma durumu olan $D < 1$ (D : sönüm faktörü) koşulu altında bu (1.2) diferansiyel denkleminin çözümü

$$x(t) = A_0 e^{-D\omega_n t} \text{Cos}(\omega_d t - \varepsilon) \quad 1.5$$

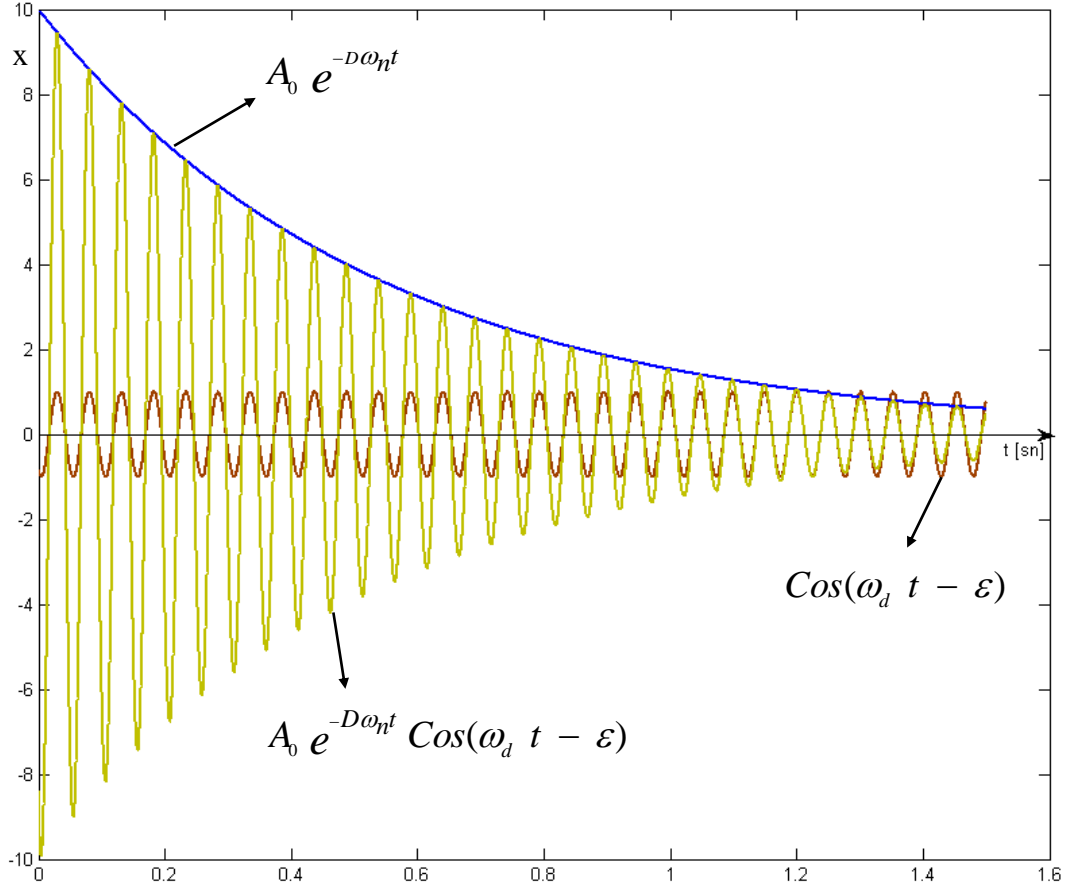
şeklindedir. Burada ω_d

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - D^2} \quad 1.6$$

şeklinde tanımlanmış bir büyüklük olup *sönümlü titreşim frekansı* adını alır.

Denklem 1.5 Çözümünün gösterdiği harekete, $A_0 e^{-D\omega_n t}$ değişken genliğine sahip bir harmonik hareket gözüyle bakmak mümkündür.

Sönümlü serbest titreşime ait çözüm periyodik bir hareket, özel olarak harmonik bir hareket vermediği için, gerçek anlamda bir frekanstan söz edilemez. Ancak çözümdeki $e^{-D\omega_n t}$ terimi göz önüne alınmazsa, kalan kısım periyodiktir ve bu kısım için söz konusu olan ω_d frekansına *sönümlü serbest titreşimlerin frekansı* denilmektedir. Denk. 1.5 çözümünden de, sönümlü serbest bir titreşimin, genliği üstel olarak azalan harmonik bir hareket olduğu belirtilebilir. Şekil 2.



Şekil 2. Genliği (x) üstel olarak azalan, viskoz sönümlü serbest titreşim hareketi

Sistem harekete başladığı, ilk başlangıç zamanında ($t = 0$), hızda sıfır ($\dot{x} = 0$) olacağından, $t = 0$ anında eğrinin bir tepe noktası olacaktır. Ayrıca, sönümlü hareket;

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad 1.7$$

periyoduna sahip olacağı için, ilk anda $t = t_0 = 0$ ise;

$$t = t_n = t_0 + nT \quad \Rightarrow \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad 1.8$$

$$\begin{aligned}
t &= t_0 = t_0 = 0 \\
t &= t_1 = t_0 + T = T \\
t &= t_2 = t_0 + 2T = 2T \\
&\cdot \\
&\cdot \\
t &= t_n = t_0 + nT = nT
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

zamanlarında da hız sıfırdır. Her t_n zamanı için Denk. 1.5'teki x (yer değiştirme) değerleri bulunacak olursa 1.10'daki gibi olur.

$$\begin{aligned}
t = 0 \quad \text{için} \quad x_0 &= A_0 \text{Cos} \varepsilon \\
t = T \quad \text{için} \quad x_1 &= A_0 e^{-\delta T} \text{Cos} \varepsilon \\
t = 2T \quad \text{için} \quad x_2 &= A_0 e^{-2\delta T} \text{Cos} \varepsilon \\
&\cdot \\
&\cdot \\
t = (n - 1)T \quad \text{için} \quad x_{n-1} &= A_0 e^{-(n-1)\delta T} \text{Cos} \varepsilon \\
t = nT \quad \text{için} \quad x_{n-1} &= A_0 e^{-n\delta T} \text{Cos} \varepsilon
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

Birbirini takip eden genlikler birbirine oranlanırsa Denk. 1.11 elde edilir.

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \wedge = e^{\delta T}
\tag{1.11}$$

$\wedge = e^{\delta T}$ Sabitine *sönme nispeti* adı verilir.

$$\wedge = e^{\delta T} \quad \Rightarrow \quad \wedge = e^{\frac{r \cdot 2\pi}{2m \omega_d}} \quad \Rightarrow \quad \wedge = e^{\frac{r\pi}{m\omega_d}}
\tag{1.12}$$

Denk. 1.12'nin her iki tarafının logaritması alınır;

$$\lambda = \ln \wedge = \ln e^{\frac{r\pi}{m\omega_d}}$$

$$\lambda = \ln \wedge = \frac{r\pi}{m\omega_d} \ln e \quad 1.13$$

$$\lambda = \ln \wedge = \frac{r\pi}{m\omega_d}$$

$$\lambda = \ln \wedge = \ln \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{r\pi}{m\omega_d} = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \quad 1.14$$

veya kısaca,

$$\boxed{\lambda = \delta T_d} \quad 1.15$$

ifadeleri elde edilir ki, bu λ sabitine de **logaritmik dekremen** veya **logaritmik azalma** ismi verilir. Görüldüğü gibi, logaritmik azalma bir yandan iki ardışık genliğin oranına, bir yandan da (sistem parametrelerinin ve viskoz sönüm katsayısının bir fonksiyonu olan) D sönüm faktörüne bağlıdır. Eğer, ardışık iki genlik yerine birbirini n periyot arayla izleyen iki genlik kullanılması halinde logaritmik azalmanın

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t + nT_d)}} \quad 1.16$$

şeklinde hesaplanabileceği açıktır. Denklem 1.14' ten λ ile D arasındaki ilişki,

$$\lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \quad 1.17$$

şeklinde özetlenebilir. Buradan da D sönüm faktörü Denk. 1.18'deki gibi elde edilir.

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}} \quad 1.18$$

2. YAY KATSAYISININ BELİRLENMESİ

Amaç: Burada, deneyde kullanılacak yayın yay katsayısının, deneysel yöntemle elde edilmesi amaçlanmaktadır.

2.1. Giriş

Helisel bir yay, üzerine uygulanan bir kuvvetle orantılı olarak uzar veya kısalır. Başka bir deyişle, Hook Kanununa göre yer değiştirme, kuvvet ile orantılıdır. Yer değiştirmeye karşılık gelen kuvvetin grafiği, düz bir doğrudur. Doğrunun eğimi $\frac{\Delta X}{\Delta F}$ yer değiştirme katsayısıdır. Bunun tersi olan $\frac{\Delta F}{\Delta X}$, birim yer değiştirmeyi oluşturmak için, kuvvetin uygulandığı yayın genliğini verir. Yayla destekli elastik bölgede tutulan “m” kütleli rijit bir cisim, mekanik titreşim analizlerinin temelini oluşturmaktadır.

2.2. Basit Teorik Bilgiler

Serbest ve sönümsüz bir kütle yay sistemin hareketine ait diferansiyel denklem aşağıda Denklem 2.1’de verilmiştir. Görüldüğü gibi bu denklem homojen bir denklemdir.

$$m \ddot{x} + k \dot{x} = 0 \quad 2.1$$

k: Yay katsayısı m: Kütle x: Yer değiştirme

Bu denklem basit bir harmonik hareket olarak telakki edilebilir ve aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} = 0 \quad 2.2$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left[\frac{rad}{sn} \right] \quad 2.3$$

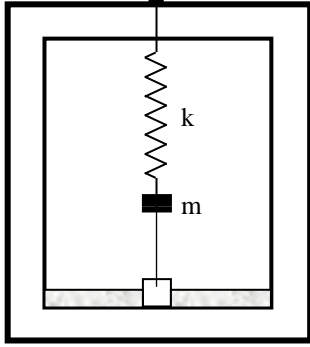
ω_n Dairesel doğal frekans olarak isimlendirilmekte ve Hz cinsinden aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [Hz] \quad 2.4$$

Buna göre periyot “T” de Denklem 2.5’deki gibi olacaktır.

$$T = 2\pi\omega_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad [saniye] \quad 2.5$$

2.3. Deneyin Yapılışı



Şekil 3.Kütle yay sistemi

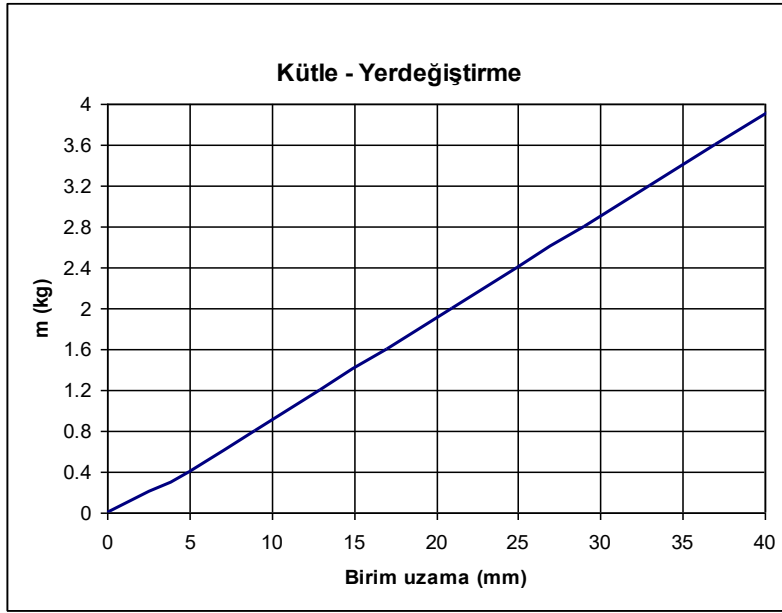
Basitçe kay katsayısı belirleme deney düzeneği yukarıda gösterilmiştir. Deneyde kullanılacak olan helisel yay elemanının yay katsayısını belirlemek amacıyla yay elemanı düzenek çerçevesindeki tespit yerine bağlanır. Yayın diğer serbest ucu ise üzerine kütlenin bağlanabileceği bir çubuğa bağlanır. Çubuk, çerçevenin alt kısmı içerisinde kayar şekilde yataklanmış bulunmaktadır. Bu düzenleme yayın uzama doğrultusunun koruması ve hassas uzama ölçümü yapılabilmesi için bir verniyer ölçeği mevcuttur.

Yay katsayısını belirlemek için mevcut kütleler kullanılarak yay yüklenir ve her bir yükleme durumunda karşılık gelen uzama miktarı ölçülerek kaydedilir. Bu sonuçlar kullanılarak yay için kuvvet-uzama grafiği çizilir. Bu değişim grafiği elastik sınır içerisinde kaldığından bir doğru olacaktır. Bu doğrunun eğiminden ilgili yay katsayısı elde edilir.

2.4. Örnek Deneysel Uygulama

Tablo 1. Örnek deneysel sonuçlar

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| m (kg) | 0 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 2.4 | 2.8 | 3.2 | 3.6 | 4 |
| Uzama (mm) | 0 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 |



Şekil .4. Yaya ait yük-deplasman grafiği

Buradan k ortalama yay katsayısı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta F}{\Delta X}$$

$$k_1 = \frac{\Delta F}{\Delta X} = \frac{0,4 \cdot 9,81}{5 \cdot 10^{-3}} = 784,8 \quad \left[\frac{N}{m} \right]$$

$$k_2 = \frac{\Delta F}{\Delta X} = \frac{(0,8 - 0,4) \cdot 9,81}{(9 - 5) \cdot 10^{-3}} = 981 \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad 2.6$$

$$k_3 = \frac{\Delta F}{\Delta X} = \frac{(1,2 - 0,8) \cdot 9,81}{(13 - 9) \cdot 10^{-3}} = 784,8 \quad \left[\frac{N}{m} \right]$$

$$k_{ort} = \frac{\sum k}{\sum n} = 963,16 \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad 2.7$$

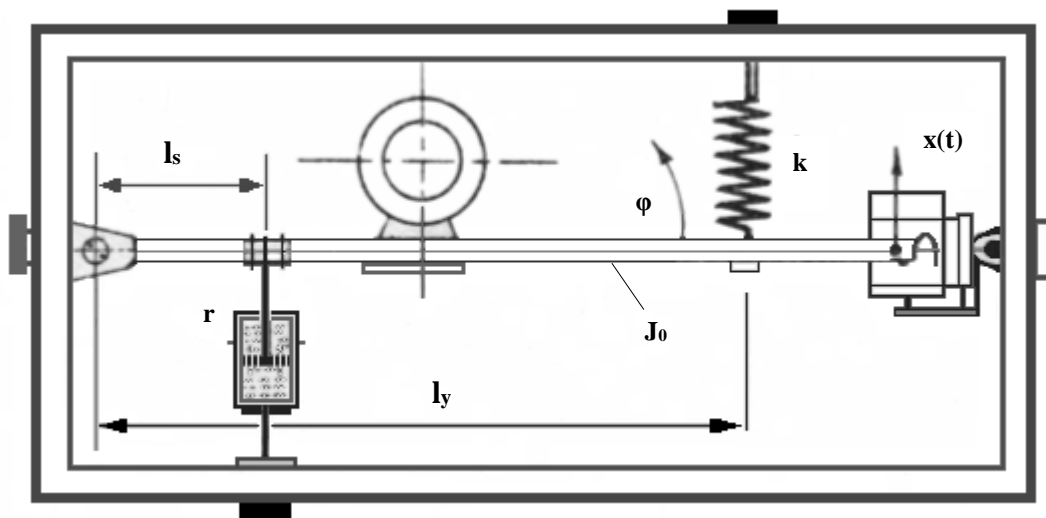
3. SÖNÜMLÜ SERBEST TİTREŞİM DENEYİ

3.1. Deneyin Amacı

Bu deneyde, bir daşpotun bilinmeyen viskoz sönüm katsayısının, daşpotun bağlandığı tek serbestlik dereceli bir sistemin, sönümlü serbest titreşimlerinin izlenmesi yoluyla belirlenmesi amaçlanmaktadır.

3.2. Deney Düzenegi

Deney çok çeşitli titreşim deneyleri yapılmasına elverişli, titreşim düzenegi üzerinde gerçekleştirilmektedir. Titreşim sistemi bir ucundan mafsallanmış, öbür ucundan ise bir yaya asılmış bir kirişten oluşmaktadır. Deney koşullarında kirişin rijid cisim gibi davrandığı, böylece sistemin tek serbestlik dereceli olduğu kabul edilmektedir. Viskoz sönüm katsayısı hesaplanmak istenen daşpot da, kirişe bağlanabilmektedir. Kirişin üzerine ayrıca, zorlanmış titreşim deneylerinde kullanmak üzere bir elektrik motoru ile titreşimleri kaydetmede kullanılan bir kalem mevcuttur. Kalem, sabit hızla dönen bir tambura sarılı kağıt üzerine hareket diyagramını çıkartmaktadır. Şekil 5.



Şekil 5. Sönümlü serbest titreşim deneyi düzenegi

3.3. Analitik Hesaplar

Kiriş, yay ve daşpottan (sönüm elemanı) oluşan deney sistemi Şekil 5.'de gösterilmiştir. Şekil 5.'deki sistemin küçük açısal titreşimlerini gösteren diferansiyel denklem

$$J_0 \ddot{\varphi} + r l_s^2 \dot{\varphi} + k l_y^2 \varphi = 0 \quad 3.1$$

veya aşağıdaki şekildedir.

$$\ddot{\varphi} + \frac{r l_s^2}{J_0} \dot{\varphi} + \frac{k l_y^2}{J_0} \varphi = 0 \quad 3.2.$$

Bu 3.2 denkleminin, 1.2 diferansiyel denklemiyle karşılaştırılmasıyla aşağıdakiler elde edilir.

$$\ddot{x} + 2D\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad 3.3$$

$$2D\omega_n = \frac{r l_s^2}{J_0} \quad 3.4$$

$$\omega_n^2 = \frac{k l_y^2}{J_0} \quad 3.5$$

3.4 ve 3.5 eşitliklerinin oranlanmasıyla da, 3.6 “*D*” sönüm faktörü elde edilebilir.

$$D = \frac{r l_s^2 \omega_n}{2k l_y^2} = \frac{r \omega_n}{2k} \left(\frac{l_s}{l_y} \right)^2 \quad 3.6$$

Daha önce verilen $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ ve $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ bağıntıları yardımıyla da

Denk. 3.7 elde edilir.

$$D = \frac{r}{k} \left(\frac{l_s}{l_y} \right)^2 \frac{\pi}{T_d \sqrt{1 - D^2}} \quad 3.7$$

Bu 3.7 denkleminde “*r*” çekilirse, viskoz sönüm katsayısı Denk. 3.8’deki gibi elde edilmiş olur.

$$\boxed{r = \frac{k T_d}{\pi} \left(\frac{l_y}{l_s} \right)^2 D \sqrt{1 - D^2}} \quad 3.8$$

3.4. Deneyin Yapılışı

1. Viskoz sönüm elemanı uygun bir konuma monte edilir. Piston üzerindeki delikler *tamamen açık* konuma getirilerek sönümlü titreşimler tayin edilir. Bunun için, kirişin küçük bir açısal başlangıç konumundan serbest bırakılması ile titreşim yapması sağlanır. Bu esnada tambura sarılı kağıt üzerine $x(t)$ hareket diyagramı kaydedilmektedir. 7-8 Tam salınım sonra kayıt durdurulur.
2. Elde edilen kayıttan ardışık iki genlik (tepe) arasındaki mesafe (x_T), başlangıç yerdeğiştirmesi A_0 , iki genlik değerleri x_1 ve x_2 hassas şekilde ölçülür Şekil 6. Buradan sırasıyla, sönümlü titreşimlerin periyodu " T_d ", Denk. 3.9 yardımıyla bulunur. Sonra, sönümlü titreşimlerin frekansı " ω_d " (Denk.1.7), sönüm sabiti " δ " (Denk.1.11) ve buradan da logaritmik dekrement " λ " (Denk.1.15-1.16) bulunur. Daha sonra sönüm faktörü " D "(Denk.1.18), ve viskoz sönüm katsayısı " r "(Denk.3.8), hesaplanır.
3. Deney raporunda deneyin yapılışını şekil çizerek anlatınız. İkinci maddede belirtildiği gibi deneyde kullandığınız daşpotun sönüm katsayısını hesaplayınız.
4. Deney raporu elle veya bilgisayar ortamında hazırlanabilir.
5. Deneyde izlenen yol tartışılmalı ve deneyin daha iyi yapılabilmesi için öneriler belirtilmelidir.
6. Serbest titreşimler ve Zorlanmış titreşimler kavramını detaylı şekilde açıklayınız.
7. Rezonans nedir? Titreşen bir yapıya ne gibi zararlar vereceğini araştırınız.
8. Deney raporları teslim tarihleri aşağıdaki gibidir. Bu tarihten sonra yapılan raporlardan puan kesintisi yapılacaktır.

Grup 1-8 5 Mart 2019

Grup 9-16 12 Mart 2019

$$T_d = \frac{30}{N\pi R} x_T \quad 3.9$$

Tambur devri N [d/d] : 3

Tambur yarıçapı R [m] : 0.04647